幾何入門 期末試験（2017 年 7 月 28 日）解答例

担当：境 圭一

1. (1) $p = q = 0, r = ad - bc.$

   (2) $\boldsymbol{u} = (-2, -3, -1).$

   (3) $x = y = z$ となるすべての $\boldsymbol{u} = (x, y, z).$

   (4) $\boldsymbol{u} = (\pm 1, 0, 0).$

   (5) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(h)) = (a^2 + b^2 + c^2)e^{ax+by+cz}.$

2. (1) $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u}) = 2\begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ z-1 \end{pmatrix}$ である．これが $\boldsymbol{0}$ となるのは $\boldsymbol{u} = (3, -2, 1)$ のとき．

   (2) $f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 - 14$ である，$f(3, -2, 2) = -13$ だから $(3, -2, 2) \in S$, よって $S \neq \emptyset$. また $f(3, -2, 1) = -14 \neq -13$ だから $(3, -2, 1) \notin S$ であり，(1) と合わせると，S 上 $\mathrm{grad}(f) \neq \boldsymbol{0}$ であることがわかる．よって S は曲面である．

   (3) $T_{\boldsymbol{v}}S$ は $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{v}) = 2\begin{pmatrix} a-3 \\ b+2 \\ c-1 \end{pmatrix}$ に直交し $\boldsymbol{0}$ を通る平面だから，$(a-3)x + (b+2)y + (c-1)z = 0$ で表される．

   (4) $\boldsymbol{w} = (a, b, c) \in S$ とし，$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in T_{\boldsymbol{w}}^{\perp}S$ とする．$T_{\boldsymbol{w}}^{\perp}S$ の基底として $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{w})\ (\neq \boldsymbol{0})$ を取れるから，$k\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3 \\ b+2 \\ c-1 \end{pmatrix}$ をみたす $k \in \mathbb{R}$ が存在する．$\boldsymbol{w} \in S$ より $(a-3)^2 + (b+2)^2 + (c-1)^2 = 1$ だから $4k^2 + (-k)^2 + 4k^2 = 1$, よって $k = \pm\frac{1}{3}$. 従って $\boldsymbol{w} = \left(\frac{11}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$ または $\left(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

   (5) S は $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 < 1\}$ を囲む．$\boldsymbol{V}$ は Ω 上定義される．S の向きに注意すると，Gauss の発散定理から

$$\int_S \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{V}\, dxdydz = 3\int_\Omega dxdydz = 3 \cdot (\Omega\text{の体積}) = 4\pi.$$

3. (1) $\partial_- S = \{(x, y, -1) \mid x^2 + y^2 = 2\}$ である．左下図より $\boldsymbol{l}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ -\sqrt{2}\sin t \\ -1 \end{pmatrix}$.（答は他にもあります）

   (2) $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}.$

   (3) $\boldsymbol{V}$ は $\mathbb{R}^3$ から z 軸を除いて得られる領域 Ω で定義される．$S \subset \Omega, \partial S = \partial_+ S \cup \partial_- S$ であるから（左下図参照），Stokes の定理と (2) より

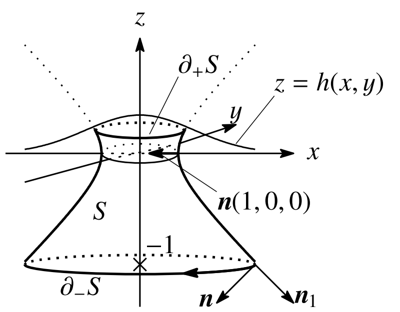
$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{m} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = 0. \tag{a}$$

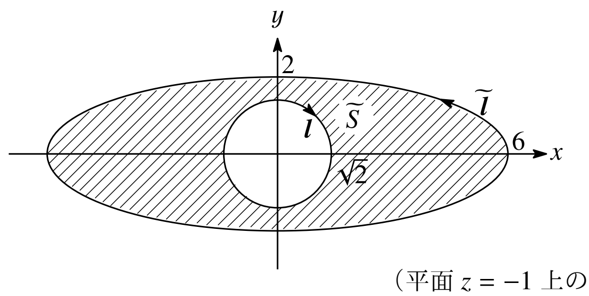
   $\widetilde{S} := \{(x, y, -1) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq 2,\ (x/6)^2 + (y/2)^2 \leq 1\}$ とおくと $\widetilde{S}$ は境界つきコンパクト曲面で（右下図参照），$\widetilde{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{u}) := (0, 0, 1)\ (\forall \boldsymbol{u} \in \widetilde{S})$ により向きを与えると，$\partial\widetilde{S}$ は向きも込めて $\boldsymbol{l}$ と $\widetilde{\boldsymbol{l}}(t) := (6\cos t,\ 2\sin t,\ -1)$ で表される．$\widetilde{S} \subset \Omega$ だから，Stokes の定理と (2) より

$$\int_{\boldsymbol{l}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}} \boldsymbol{V} \cdot d\widetilde{\boldsymbol{l}} = \int_{\widetilde{S}} \mathrm{rot}\boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{S} = 0. \tag{b}$$

   (a), (b) から

$$\int_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{m} = \int_{\widetilde{\boldsymbol{l}}} \boldsymbol{V} \cdot d\widetilde{\boldsymbol{l}} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{V}\begin{pmatrix} 6\cos t \\ 2\sin t \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{d\widetilde{\boldsymbol{l}}}{dt}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{36(\cos^2 t + \sin^2 t)} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 6\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \frac{2\pi}{3}.$$





（平面 $z=-1$ 上の絵）

4. (1) $\mathrm{div}(g\cdot\mathrm{grad}(f))=\mathrm{grad}(g)\cdot\mathrm{grad}(f)+g\cdot\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))=\mathrm{grad}(g)\cdot\mathrm{grad}(f)+g\cdot\Delta f$ だから，S の向きに注意して Gauss の発散定理を使うと

$$\int_S(g\cdot\mathrm{grad}(f))\cdot d\boldsymbol{S}=\int_\Omega\mathrm{div}(g\cdot\mathrm{grad}(f))\,dxdydz=\int_\Omega(\mathrm{grad}(g)\cdot\mathrm{grad}(f)+g\cdot\Delta f)\,dxdydz.$$

(2) (1) で $g=f$ の場合を考えると

$$\int_S(f\cdot\mathrm{grad}(f))\cdot d\boldsymbol{S}=\int_\Omega\left(\left|\mathrm{grad}(f)\right|^2+f\cdot\Delta f\right)dxdydz.$$

$f|_S=0,\ \Delta f|_\Omega=0$ であることから

$$0=\int_\Omega\left|\mathrm{grad}(f)\right|^2\ dxdydz.$$

$\left|\mathrm{grad}(f)\right|^2\geq 0$ だから，Ω 上いたるところ $\mathrm{grad}(f)=\boldsymbol{0}$, つまり $\partial_x f=\partial_y f=\partial_z f=0$ であることがわかる．よって f は Ω 上定数である．$S\ (\subset\Omega)$ 上 $f=0$ だから，Ω 上 $f=0$ である．

補足.

1. (1) は 左辺 $=(ad-bc)\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ であることと，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ が 1 次独立であることを使う．(2) の $\mathrm{div}\boldsymbol{V}=(x+2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2$, (3) の $\mathrm{rot}\boldsymbol{W}=(z-y,\ x-z,\ y-x)$, (4) の $\mathrm{grad}(f)=\dfrac{(1-x^2+y^2+z^2,\ -2xy,\ -2zx)}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$. (5) は $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(h))=\Delta h$ と $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}=a^2h$ などから．中間試験の 1. (2) を復習した人は，(4) で同じ間違いは繰り返さなかったはず．
2. (3), (4) は，$S=f^{-1}(k)$ の形のときは $T_{\boldsymbol{u}}^{\perp}S$ の基底として $\mathrm{grad}(f)(\boldsymbol{u})$ を取れることを使う．
3. S は一葉双曲面の一部．(3) の解答例では複雑な積分を回避するため，$\widetilde{S}$ を導入して Stokes の定理を 2 回使った．$\widetilde{S}$ や $\widetilde{\boldsymbol{l}}$ の中に現れる “6” と “2” に意味はなく，$\sqrt{2}$ より大きく $3:1$ の比になる数の組であれば何でもよい．
このようにしなくても，$-\displaystyle\int_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{l}$ を直接計算することもできるし，Stokes の定理を使わなくても，$\displaystyle\int_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{m}$ を直接計算することもできる（例えば円柱座標 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を使うと $\boldsymbol{m}$ をうまく取れる）．ただし，これらの方法はかなり大変．
∂_+S を表す関数 $z=h(x,y)$ は最終的な積分値には関係しない（$\boldsymbol{m}$ をある程度具体的に表示するには必要）．h が r に関して単調減少であるという条件は，S が弧状連結になるようにするためのもので，あまり本質的ではない．
4. 0 以上の値を持つ連続関数については，積分値は 0 以上で，0 になるのは関数が定数関数 0 である場合に限られる．$\Delta f=0$ は熱方程式と呼ばれる偏微分方程式（の特別な場合）で，熱の分布が平衡状態にある様子を記述している．この問題は，Ω 上で熱の移動がなく，$S=\partial\Omega$ で温度一定であれば，Ω 上いたるところ温度一定でなければならない，という（直感的には明らかな）事実のベクトル解析による証明，と解釈できる．詳細は「熱・波動方程式論」などで学ぶかもしれません．

配点：15, 15, 12, 8 (**1**: $3\times5=15$, **2**: $3\times5=15$, **3**: $4+3+5=12$, **4**: $3+5=8$)