2017 年度 幾何入門 期末試験 結果

担当：境 圭一

平均点は 24.6 点，最高点は 40 点でした．人数分布は以下の通りです：

点数	~ 15	16 ~ 20	21 ~ 25	26 ~ 30	31 ~ 35	36 ~ 40
16S	4	10	9	16	9	4
それ以外	1	0	4	0	0	0

問題ごとの平均点は以下の通りです：

16S：

問題	1	2	3	4	合計
平均	11.3	9.2	3.2	1.4	25.0

それ以外：

問題	1	2	3	4	合計
平均	12.2	5.6	2.6	0.2	20.6

答案用紙 No. 1 の右上に赤で書いてあるのが期末試験の点数，青はレポート 1 ~ 14 の点数の合計 (+2)[*1] です（最大 30 点）．大問ごとの点数は各用紙の右下または裏面に書いてあります．また，○で囲ったアルファベットは最終的な成績です：

S：「秀」， A:「優」， B：「良」， C：「可」， F：「不可」

最終的な成績の分布は以下の通りです．平均点は 65.2 点，最高点は 100 点でした（100 点を超えた人もいますが，データ上は 100 点です）．

成績	不可 (F)	可 (C)	良 (B)	優 (A)	秀 (S)
人数 (16S)	13	11	16	9	5
人数 (16S 以外)	6	1	1	0	0

断片的な記憶を頼りに，昨年の解答例と似た記述をしようとしている答案がたくさんありました．昨年と似た問題であっても設定が少しずつ変わっているわけで，昨年の解答がそのまま通じるはずもありません．解答例を頼りに中身をしっかり理解することが大事で，解答例を暗記しても何の意味もありません．一つ一つのことを理解するのには膨大な時間がかかりますが，そういったステップを**日頃から**着実に踏んでいくことにより土台が出来上がり，より難しい今後の講義の内容にも対応できるようになっていくと思います．目先の点数にとらわれて，試験を暗記で乗り切るような勉強をしていてはいけません．それは結局のところ遠回りですし，卒業したときに何も残りません．

以下，問題ごとのコメントです．

1. (1) は演習 11 (6/30) の問題 6 で，講義で証明を省略したところを各自で補ってもらうために用意した問題です．こういうのは必ず自分でやってみなければいけません．答のみ要求したので途中経過は見ていませんが，正解していても「$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が 1 次独立だから $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底をなし，従って与えられた式の両辺の係数を比べればよい」と理由まで正しく理解できているかは怪しいところです．「$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ とおいて…」のような答案は，このあたりを理解できていないと思われます．この問題では，成分表示してもいいことはありません．他の誤答例として
   - $r = ad + bc$ … “$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$” としたと思われる（正しくは $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$）
   - $p = ac, q = bd$ … “$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$” としたと思われる（正しくは $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$）

   $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ は定義通り計算すれば確認でき，特に $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ の場合を考えれば $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ を得ます．

   (4) で ± を落としてしまう理由は何でしょうか？これだけ多いと何か特別な理由があるような気がします．
2. 昨年の問題 2 と同様だと思いますが，かなり出来が悪く，意外でした．特に (3), (4) が良くありません．(3) は a, b, c が与えられた定数で，方程式の変数としてはこれらと別の文字，例えば x, y, z を使わなくてはいけません．多かった間違いは “$(x-3)a + (y-3)b + (z-1)c = 0$” というもので，定数と変数の混同が起こっています．$T_{\boldsymbol{v}}S$ が

[*1] レポートは 各回 2 点 × 14 回 ですが，30 点分つけると最初に宣言しましたので，中間・期末試験を両方受験した人には +2 点つけました

部分ベクトル空間だと問題文に書いてあるので，原点を通らなければ誤りだということに気づくはずです．

(5) では Ω が半径 1 の球体であることがわかっていれば，その体積が $\dfrac{4\pi}{3}$ であることは使ってよいものとしました．昨年のコメントに書いた「線形変換」という言葉に惑わされて「線形変換 $(x,y,z) \mapsto (x-3, y+2, z-1)$」と書いた答案がいくつかありましたが，平行移動は線形ではありません．線形写像の定義を復習してください．

(2) では $S \neq \emptyset$ と，$\mathrm{grad}(f)$ が S 上 $\mathbf{0}$ にならないことを確認すればよいのですが，$S \neq \emptyset$ を先に調べるべきでしょう．仮に $S = \emptyset$ だった場合，$\mathrm{grad}(f)|_S$ を調べることに何の意味もなくなります．

3. 昨年の問題 3. (2) は $\boldsymbol{n}$ を求める問題でしたが，今回は $\boldsymbol{n}$ を求めよとは書いてありません．なぜ (1) で $\boldsymbol{n}$ を求めようとしている答案が多いのか，とても不思議です．そのような答案には「$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を用いた」などと書いてあったりもします．**思い込みで話をしてはいけません．お互いに相手の話を聞く姿勢が大事です．**
4. 昨年の演習問題 12 の問題 7 を少し易しくしたものです．(2) で "S 上 $f = 0$ だから $\mathrm{grad}(f) = \mathbf{0}$" のような答案が多かったのですが，これは誤りです．一般に，関数 f と，その定義域内の点 $\boldsymbol{u}$ について，$f(\boldsymbol{u}) = 0$ となることと，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{u}) = 0$ となることの間には，何の因果関係もありません．また "$\displaystyle\int_\Omega \mathrm{grad}(g) \cdot \mathrm{grad}(f) dxdydz = 0$ だから Ω 上 $\mathrm{grad}(g) \cdot \mathrm{grad}(f) = 0$" というのも誤りです．積分値が 0 でも，それは一般には正負が打ち消しあった結果です．

   (1) の公式を $f = g$ の場合に適用する，という発想にはなかなか至らなかったかもしれません．(1) は一般の 2 つの関数 f, g に関する定理と思えるわけですが，こういうときに特別な場合，例えば f や g が簡単な形をしている場合や，f と g の間に何かしらの関係式が成り立つ場合などを考えると，面白い系が得られる場合があります．この問題の場合は $f = g$ の場合を考えることにより「偏微分方程式 $\Delta f = 0$ がある境界条件のもとで完全に解ける」という系が得られたわけです．今後いろいろな定理に出会うと思いますが，**一般的な形で書かれている定理を特別な場合に適用してみる**，ということをいつも心がけるといいと思います．

採点には万全を期しましたが，万が一誤りがあると思われる場合は，成績を確定させる予定の 8/18（金）までに申し出てください．答案は全てコピーを取り保存していますので，ただちに調べます．

まとめ，今後の展望

今後学ぶ数学のほとんどは，何らかの意味で，線形代数または微分積分（または両方）を発展させたものです．この講義で扱った内容（ベクトル解析）はその発展のスタート地点のような位置づけです．関数のある種の一般化であるベクトル場に対し，微分の一般化として grad, div, rot といった作用素を，積分の一般化として線・面積分を定義しました．これらは (i) 力学や電磁気学などに由来し，(ii) 微分積分学の基本定理の拡張と言える Gauss の発散定理や Stokes の定理が成り立つ，という二つの理由により，正当な一般化であると言えます．また曲線の接線や曲面の接平面を関数の 1 次近似として捉えることで，Taylor 展開の幾何学的意味がある程度明確になりました．接線や接平面はベクトル空間なので，幾何学に線形代数を適用するための足掛かりとなります．

この講義では $\mathbb{R}^2$ 内の曲線，$\mathbb{R}^3$ 内の曲面を扱いました．曲面のほうが複雑に見えたかもしれませんが，今回は曲面が「正則閉曲線の 2 次元版」であることを述べ，曲線と曲面についてのいろいろな議論が平行に進んでいることを強調してみたつもりです．このことがある程度納得できると，2 次元や 3 次元にこだわる必要がなく，より一般の次元で同様のことができそうだということに気づきます．こういった一般化は，話を抽象的にしてわかりにくくするように見えますが，実は逆です．例えば Stokes の定理の証明は何をしているのか見えづらかったと思いますが，曲線や曲面を **$\boldsymbol{n}$ 次元多様体**にまで一般化し，高い視点から考察すると，もう少し見通しよく，しかもずっと強力な形で Stokes の定理を証明することができます．理論を一般化することの威力をお話しできればよかったのですが，それは**多様体論**などの今後の講義に譲りたいと思います．