幾何学特別講義 IV 演習問題 1（2017 年 9 月 28 日）

担当：境 圭一

問題. G, G_1, G_2 などは Abel 群とは限らない群とする．群の演算を $G \times G \ni (g,h) \mapsto gh \in G$ で表す．G, G_1, G_2 の単位元を e, e_1, e_2 で表す．

(1) $e \in G$ は唯一つに定まることを示せ．また各 $g \in G$ に対し，その逆元 g^{-1} は唯一つに定まることを示せ．

(2) $H \lhd G$（**正規部分群**），つまり $H < G$（部分群）で，任意の $h \in H$ と $g \in G$ に対し $g^{-1}hg \in H$ が成り立つとする．$g \in G$ に対し $gH := \{gh \in G \mid h \in H\}$ とおく．
- 「$g \in g'H \iff gH = g'H$」を示せ．
- G 上の同値関係

$$g \sim g' \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad gH = g'H$$

による商集合を G/H と書く．$g \in G$ を含む同値類を $[g]$ と書くとき，$[g] = gH$ を示せ．また

$$[g][g'] := [gg']$$

により G/H は群の構造を持ち，単位元は $[e]$, $[g]$ の逆元は $[g^{-1}]$ となることを示せ．G/H を**商群** (quotient group), **剰余群** (factor group) などとよぶ．

(3) G が Abel 群であるとき，任意の部分群 $H < G$ は正規であることを示せ．

(4) $\varphi\colon G_1 \to G_2$ を準同型とするとき，
- $\varphi(e_1) = e_2$ であることを示せ．
- $\operatorname{Ker}\varphi \lhd G_1$ であることを示せ．
- 「φ が単射 $\iff \operatorname{Ker}\varphi = \{e_1\}$」を示せ．（このとき $\varphi\colon G_1 \hookrightarrow G_2$ と書く）
- 「φ が全射 $\iff \operatorname{Im}\varphi = G_2$」を示せ．（このとき $\varphi\colon G_1 \twoheadrightarrow G_2$ と書く）

(5) 直積集合 $G_1 \times G_2$ 上に

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) := (g_1h_1, g_2h_2)$$

で積を定義することにより $G_1 \times G_2$ は群の構造を持ち，単位元は (e_1, e_2), (g_1, g_2) の逆元は (g_1^{-1}, g_2^{-1}) となることを示せ．$G_1 \times G_2$ を**直積群** (direct product) とよぶ．

補足．上のようなことは既に学んでいるはずですが，不安があれば何度でもやってみることをおすすめします．特に商群 G/H はこの講義では最も重要なものの一つですから，よく理解してほしいと思います．積 $[g_1][g_2] = [g_1g_2]$ が well-defined なのはどうしてでしょうか？ H が正規でなければならないのはなぜでしょうか？
群の演算は gh のように積で表すのが一つの流儀ですが，Abel 群の場合には gh の代わりに $g+h$ のように和の記号を使って群の演算を表すこともあり，この講義では後者の記法を採用します（参考書がそうなっているから）．行列の和と積のことを思い出すと，可換な場合に和の記号を使い，非可換な場合に積の記号を使う，という気持ちは何となくわかると思います．この記法では，Abel 群の単位元は 0 で，g の逆元は $-g$ で表します．Abel 群の商群 G/H の群構造は $[g] + [h] := [g+h]$ で定義されます．自明な群（単位元だけからなる群）は $\{0\}$ とか，単に 0 で表します．また直積群は，Abel 群の場合は直和 $G_1 \oplus G_2$ で表すことが多いようです．