幾何学特別講義 IV 演習問題 2（2017 年 10 月 5 日）

担当：境 圭一

問題 1. 自明な群（単位元だけからなる群）を 0 で表す.

(1) 群の系列 $0 \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} H \longrightarrow \cdots$ について「G において完全 $\Longleftrightarrow \varphi$ は単射」を示せ.

(2) 群の系列 $\cdots \longrightarrow K \xrightarrow{\psi} L \longrightarrow 0$ について「L において完全 $\Longleftrightarrow \psi$ は全射」を示せ.

(3) $\varphi\colon G \to H$ を群の準同型とするとき， $0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Im}\varphi \longrightarrow 0$ は短完全系列であることを示せ．ただし i は包含写像 (inclusion) とする．（教科書 p. 23, 例 3.2.4 を参照）

(4) $0 \longrightarrow G_3 \xrightarrow{\psi} G_2 \xrightarrow{\varphi} G_1 \longrightarrow 0$ が短完全系列であるとき，$\varphi\colon G_2/\operatorname{Im}\psi \to G_1$ が well-defined な同型であることを示せ.

問題 2. 群の系列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$ を，$\psi(m) := 2m$, p を自然な射影として定義する.

(1) 上の系列は完全であることを示せ.

(2) $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$ を示せ.

問題 3. 群の系列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$, $\psi(m) := (6m, km)$, $\varphi(m, n) := 2m + 3n$ がチェイン複体であるとき，k の値を求めよ．またそのときのホモロジー群を計算せよ.

補足.

(1) 問題 2 の短完全系列に問題 1. (4) を適用すると $\mathbb{Z}/\operatorname{Im}\psi \cong \mathbb{Z}/2$ です．明らかに $\operatorname{Im}\psi = \{$ 偶数 $\}$ ですが，$\operatorname{Im}\psi \to \mathbb{Z}$ を $2m \mapsto m$ で定義すると，これは群の同型であることがわかります．「同型なものは同一視する」と入門書によく書いてあるので言われるとおりにしてみると，$\mathbb{Z}/\operatorname{Im}\psi \cong \mathbb{Z}/2$ という同型が “$\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2$” に見えます．$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ は自明な群ですから，$\mathbb{Z}/2$ も自明な群ということになり，何か変です.

この議論の間違いを指摘してください．こういう誤りは，意外とたくさん見かけます.

(2) 2 次元円板 $D^2 := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid |p| \leq 1\}$ は，境界として $\partial D^2 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid |p| = 1\} =: S^1$ を持ちますが，S^1 は境界を持ちませんから $\partial(\partial S^1) = \emptyset$ です．このように，「境界」の意味がきちんと定まるような空間 X に対しては，たいてい

$$\partial(\partial X) = \emptyset \qquad (*)$$

が成り立ちます．群の系列 $\cdots \longrightarrow G_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} G_i \xrightarrow{\partial_i} G_{i-1} \longrightarrow \cdots$ がチェイン複体であることの条件

$$\partial_i(\partial_{i+1}(x)) = 0 \qquad (\forall x \in G_{i+1})$$

と $(*)$ との見た目の類似に注目してください．実はチェイン複体の準同型の列 ∂_i は，図形の境界を取ることを代数的に表現したものです．記号 ∂ を使っていること，また $B_i(G_*) = \operatorname{Im}\partial_{i+1}$ の元をバウンダリ (boundary) とよぶことの理由はここにあります．$Z_i(G_*) = \operatorname{Ker}\partial_i$ の元をサイクル (cycle) とよぶのは，サイクルが境界のない図形，例えば文字通り「サイクル」（円周）である S^1 のようなものを表すからです.

このような幾何学的背景は，講義が進めばはっきり見えてきます．後で改めて見返してみてください.