幾何学特別講義 IV 演習問題 3（2017 年 10 月 12 日）

担当：境 圭一

問題 1.

(1) 群の系列 $G_* : 0 \longrightarrow G_2 \xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0 \longrightarrow 0$,

$$G_2 = G_1 = G_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \qquad \partial_2(k,l) := (k+l, k+l), \quad \partial_1(m,n) := (m-n, n-m)$$

はチェイン複体であることを示せ.

(2) 次の同型を示せ：

$$H_i(G_*) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0,2 \\ 0 & i \neq 0,2 \end{cases}$$

問題 2.

(1) 講義でやったチェイン複体 $G'_* : 0 \longrightarrow G'_2 \xrightarrow{\partial'_2} G'_1 \xrightarrow{\partial'_1} G'_0 \longrightarrow 0$,

$$G'_2 = G'_1 = G'_0 = \mathbb{Z}, \qquad \partial'_2(m) := 2m, \quad \partial'_1 = 0$$

を考える．問題 1 のチェイン複体 G_* に対し，$\varphi_* \colon G_* \to G'_*$ を，各 $i = 0,1,2$ に対し $\varphi_i \colon \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (k,l) \mapsto k+l$ で定義すると，φ_* はチェイン準同型であることを示せ.

(2) $\varphi_{i*} \colon H_i(G_*) \to H_i(G'_*)$ は，$i = 0$ のとき同型，それ以外では自明な準同型であることを示せ.

ヒント．$H_i(G_*) \cong \mathbb{Z}$ $(i = 0,2)$ を示すとき，定義通り $H_i(G_*) = Z_i(G_*)/B_i(G_*)$ を計算するわけですが，まず

(i) $B_2(G_*) = 0, \quad Z_2(G_*) = \{(a,-a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$,

(ii) $B_0(G_*) = \{(a,-a) \mid a \in \mathbb{Z}\}, \quad Z_0(G_*) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

です（確かめてください）．(i) より $H_2(G_*) = Z_2(G_*)/B_2(G_*) = Z_2(G_*) = \{(a,-a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ですが，この群は

$$f \colon \{(a,-a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z}, \quad f(a,-a) := a$$

により $\mathbb{Z}$ と同型です．f が準同型で，全射かつ単射であることを示してください.
また (ii) より $H_0(G_*) = Z_0(G_*)/B_0(G_*) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\{(a,-a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ですが，この群は

$$g \colon (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\{(a,-a)\} \to \mathbb{Z}, \quad g([m,n]) := m+n$$

により $\mathbb{Z}$ と同型です．g が代表元 (m,n) の取り方によらず well-defined な準同型で，全射かつ単射であることを示してください.
多少の慣れがないと，上のように商 Abel 群を求める（同型 f, g を見つける）のは簡単ではないかもしれません．このあたりについては，このあとの講義で少し補足します.

補足．講義で飛ばした定理 2.16 の詳細な証明は，各自でぜひ一度はやってみてください．証明を文章で書くだけでなく，可換図式上で考えること (diagram chasing) をおすすめします．一度やった後は証明の詳細な内容を暗記する必要はなく，定理を実際にどう使うか，が大切です．応用する機会がたくさんある重要な定理です.