幾何学特別講義 IV レポート問題 1（2017 年 10 月 19 日）

担当：境 圭一

問題. 各自の学籍番号の数字下二桁の和を n とする．例えば S151067X なら $n = 13$, S151089Y なら $n = 17$.
次のチェイン複体 G_* のホモロジー群 $H_i(G_*)$ $(i = 0, 1)$ を計算せよ．

$$0 \xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0 \xrightarrow{\partial_0} 0, \qquad G_1 = G_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \qquad \partial_1(a, b) := ((n + 3)a + b, -2a + nb).$$

ヒント．定義通り $H_i(G_*) = \mathrm{Ker}\,\partial_i / \mathrm{Im}\,\partial_{i+1}$ を計算する．$H_0(G_*)$ の計算には 10/19 の講義の内容を使える．

※**締切：10/26 の講義開始時**．教卓の上に置いてください．

※代理提出可です.

※締切以前の提出も受け付けます．研究室 (A403) にお越しください.

幾何学特別講義 IV 演習問題 4（2017 年 10 月 19 日）

担当：境 圭一

※提出の必要はありません．レポート問題は裏面にあります．

問題 1. 自由 Abel 群 $\mathbb{Z}S$ が実際に Abel 群になっていることを確かめよ．また $S=\{x_1,\dots,x_n\}$ $(n\geq 1)$ とするとき，$\mathbb{Z}S\to\mathbb{Z}^{\oplus n}$, $\sum_i a_i x_i\mapsto(a_1,\dots,a_n)$ は Abel 群の同型であることを示せ．

問題 2. $S:=\{x_1,\dots,x_n\}$ とする．次の準同型 $\varphi\colon\mathbb{Z}S\to\mathbb{Z}S$ は Abel 群の同型であることを示せ．

(1) $1\leq i,j\leq n$ $(i\neq j)$ と $k\in\mathbb{Z}$ を固定するとき

$$\varphi(x_l):=\begin{cases}x_l & l\neq i,\\ x_i+kx_j & l=i.\end{cases}$$

(2) $1\leq i,j\leq n$ $(i\neq j)$ を固定するとき

$$\varphi(x_l):=\begin{cases}x_l & l\neq i,j,\\ x_j & l=i,\\ x_i & l=j.\end{cases}$$

(3) $1\leq i\leq n$ を固定するとき

$$\varphi(x_l):=\begin{cases}x_l & l\neq i,\\ -x_i & l=i.\end{cases}$$

注意．φ は準同型ですから，(1)〜(3) いずれについても，$\mathbb{Z}S$ の一般の元 $x=\sum_l a_l x_l$ に対しては $\varphi(x)=\sum_l a_l\varphi(x_l)$ となります．

問題 3. Abel 群の可換図式

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G_1 \arrow[d, "g"] \\ H_2 \arrow[r, "\psi"] & G_2 \end{tikzcd}$$

が与えられたとする．

(1) $\overline{g}\colon G_1/\mathrm{Im}\,\varphi\to G_2/\mathrm{Im}\,\psi$, $\overline{g}([x]):=[g(x)]$ は well-defined な準同型であることを示せ．

(2) f,g が同型であるとき，$\overline{g}$ は同型であることを示せ．

補足．次回以降，位相空間（単体複体）X に対し，あるチェイン複体 $C_*(X)$ を定義し，そのホモロジー群 $H_*(C_*(X))$ を X のホモロジー群と呼んで $H_*(X)$ と書きます．$H_*(X)$ を計算するときは，定義通り $Z_i(X)/B_i(X)$ を計算することは得策でない場合が多く，X をいくつかの（計算しやすい）部分空間 $X_1,X_2,\dots$ に分割し，それらのホモロジー群 $H_*(X_k)$ たちを組み合わせて $H_*(X)$ を決定する，といった方法を採ることが多いように思います．その際のカギの一つが，10/12 の講義でやった定理 2.16 の完全系列です．

とは言っても，そういった簡略化はいつでも可能なわけではなく，仕方なく定義通りに計算するしかない場合もありますから，地道に剰余群を求める方法にも慣れておくとよいと思います．10/19 の講義では，そのことを念頭に，$\varphi\colon\mathbb{Z}S\to\mathbb{Z}T$ に対し $\mathbb{Z}T/\mathrm{Im}\,\varphi$ の計算を扱いました．また問題 3 はそのようなときに役立つかもしれず，$G_1/\mathrm{Im}\,\varphi$ を求めたいときに，よりわかりやすい表示を持つ G_2,H_2 にうまく同型で書き換えられれば，$G_2/\mathrm{Im}\,\psi$ のほうが計算しやすい可能性があります．図式が可換であることが大切で，可換性を無視すると，演習問題 2 の補足のような誤りの原因になります．