幾何学特別講義 IV レポート問題 1（2017 年 10 月 19 日）コメント

担当：境 圭一

まず $\mathrm{Ker}\,\partial_1 = 0$ であることから $H_1(G_*) = 0$ です．
∂_0 の値域は 0 なので，調べずとも $\mathrm{Ker}\,\partial_0 = G_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ です．よって $H_0(G_*) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/\mathrm{Im}\,\partial_1$ です．一方 ∂_1 は

$$\partial_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \text{ただし} \quad P := \begin{pmatrix} n+3 & 1 \\ -2 & n \end{pmatrix}$$

で与えられます．$H_0(G_*)$ は 10/19 の講義でやった「P が定める群」$G(P)$ に他なりません．P の 1 行目の n 倍を 2 行目から引き，そのあと 2 列目の $n+3$ 倍を 1 列目から引くと

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(n+1)(n+2) & 0 \end{pmatrix}$$

に変形されます．$G(P) \cong G(Q)$ で，

$$G(Q) = \langle y_1, y_2 \mid -(n+1)(n+2)y_2, y_1 \rangle \cong \langle y_2 \mid (n+1)(n+2)y_2 \rangle \cong \mathbb{Z}/(n+1)(n+2)$$

です．あとは各自の n を代入すれば答が得られます．ここでは $n \geq 1$ で，$n+1$ と $n+2$ が互いに素になることから，$\mathbb{Z}/(n+1) \oplus \mathbb{Z}/(n+2)$ と書いても正解です．
話の流れがわかるよう，きちんとした文章を心がけるべきです．「$\ker \partial_0 = G_0$, $\partial_1(a,b) = \cdots$ だから，$P = \cdots$ とおけば $H_0(G_*) \cong G(P)$. P を基本変形すると…だから，…」くらいは書くべきでしょう．講義の担当者が採点者でもあるので，説明不足な答案でも何となく言いたいことがわかってしまいますが，いざ世の中に出たときはそうではありません．**読み手に解釈を委ねるような文章は「意味がわからない」と弾かれておしまいです．**
H_1 が 10 点，H_0 が 15 点の計 25 点満点で採点しています．当然ながら，途中の議論により部分点や減点があります．

$H_0(G_*)$ は講義でやった $G(P)$ の形ですが，**多くの人が，本来使うべき行列の転置になっていました．**その理由を述べるため，状況を整理しましょう．$S = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $T = \{y_1, \ldots, y_n\}$ とし，$\varphi\colon \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}T$ を準同型とするとき，各 $\varphi(x_i)$ は $y_1, \ldots, y_n$ の $\mathbb{Z}$ 係数の線形和で表せるので

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_1) & \cdots & \varphi(x_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} P \tag{1}$$

となるような $n \times m$ 行列 P（成分はすべて整数）が存在します．この P が，基底 $\{x_1, \ldots, x_m\}, \{y_1, \ldots, y_n\}$ に関して φ を表現する行列ですが，その意味は $\psi\colon \mathbb{Z}^{\oplus m} \to \mathbb{Z}^{\oplus n}$ を

$$\psi \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} := P \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

と定義したとき次の図式が可換になる，ということです：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "x_i \mapsto \boldsymbol{e}_i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z}T \arrow[d, "y_j \mapsto \boldsymbol{e}_j"] \\ \mathbb{Z}^{\oplus m} \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{Z}^{\oplus n} \end{tikzcd}$$

準同型 φ は，$\mathbb{Z}S$ や $\mathbb{Z}T$ そのもので議論するときは (1) のように行列を右から掛け，基底を取って座標で表示するときは (2) のように行列を左から掛けることに対応します．問題文は (2) の形で与えられていましたが，これと (1) を書き直した

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ \vdots \\ \varphi(x_m) \end{pmatrix} = {}^t P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

を混同すると，行列は転置になってしまいます．

もっとも，この誤りは（この問題に関しては）さほど深刻ではなく，行変形と列変形をすべて入れ替えれば，結局は同じ結論が得られます．今回の採点では問題視しないことにしましたが，自分が正しい行列を選んでいるか，チェックしてください．

他の誤りとしては，行列の基本変形のときに ± 1 以外の整数を行または列に掛けた（と思われる）人が多くいました．$\mathbb{Z}$ 加群の基底変換をしていることに対応するので，ある行を 2 倍するとか，ある列を -3 倍するとかはやってはいけません．これらは $\mathbb{Z}$ 上では可逆でない操作です．ある行の 4 倍を別の行に加える，というのは OK です．