幾何学特別講義 IV 演習問題 6（2017 年 11 月 9 日）

担当：境 圭一

**問題 1**. $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ $(n \geq 1)$ は一般の位置にあるとし，$k = 0, \dots, n$ に対し $\sigma^k := |v_0 \dots v_k|$ とする．

(1) $H_i(K(\sigma^3))$ を計算せよ．ただし $K(\sigma^3)$ は $\sigma^3$ のすべての面からなる単体複体．

(2) $L_3 := K(\sigma^3) \setminus \{\sigma^3\}$ とおく．$H_i(L_3)$ を計算せよ．

(3) $L_n := K(\sigma^n) \setminus \{\sigma^n\}$ とおく．$H_i(K(\sigma^n)), H_i(L_n)$ の計算を試みよ．

答はそれぞれ

$$H_i(K(\sigma^n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, \\ 0 & i > 0, \end{cases} \quad H_i(L_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, n-1, \\ 0 & i \neq 0, n-1. \end{cases}$$

**問題 2**. $v_0 = (0,0), v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1), v_3 = (-1,1), v_4 = (-1,-1) \in \mathbb{R}^2$ とする．

(1) $K = \{|v_0|, |v_1|, |v_2|, |v_3|, |v_4|, |v_0 v_1|, |v_1 v_2|, |v_2 v_0|, |v_0 v_3|, |v_3 v_4|, |v_4 v_0|\}$ とおく．$|K|$ は $S^1 \vee S^1$（二つの $S^1$ の一点和）と同相であることを示せ．

(2) $H_i(K)$ を計算せよ．答は

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_i(K) = 0 \quad (i \neq 0, 1).$$

**問題 3**. トーラスを，正方形の向かい合右辺を「同じ向きに」同一視して得られるものとみなす（図 1 左）．図 1 右の $K$（各三角形の内部も含む）は 2 次元単体複体で，トーラスの単体分割を与えていることを示せ．$H_i(K)$ の計算を試みよ（参考書の 42 ページ参照）．答は

$$H_i(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 2, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & i = 1, \\ 0 & i \neq 0, 1, 2. \end{cases}$$

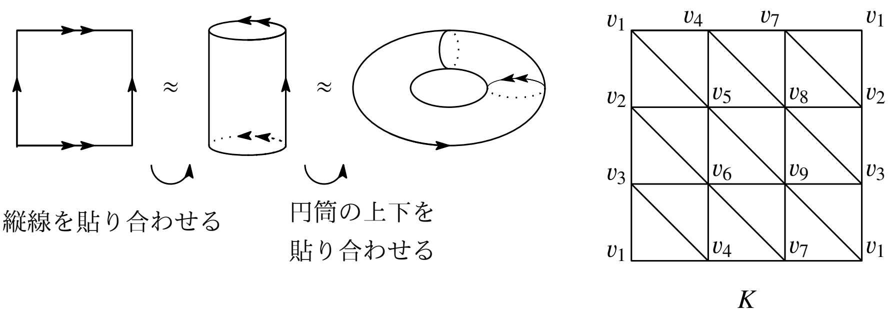


図 1　トーラスの単体分割

**補足**．単体複体 $K$ のホモロジー群を定義通り計算するには，チェイン複体 $C_*(K)$ の基底を取る必要があり，そのためには各単体 $|v_0 \cdots v_n|$ の向きを選ぶ必要があります．$n \geq 1$ なら選び方は 2 通りありますが，どちらを選んでも計算結果に影響はありません．例えば，ある 2 単体の向きを $\langle v_0 v_1 v_2 \rangle$ のように選んだとき，もし $\partial_3 \colon C_3(K) \to C_2(K)$ の計算中に $\langle v_1 v_2 v_0 \rangle$ が現れたら $+\langle v_0 v_1 v_2 \rangle$ におきかえ，$\langle v_1 v_0 v_2 \rangle$ が現れたら $-\langle v_0 v_1 v_2 \rangle$ におきかえる，といったふうにすればよいわけです．

位相空間のホモロジー群を導入する方法は少なくとも 3 通りくらいあります．

(1) この講義で扱う「単体複体のホモロジー」は直観的にわかりやすいのですが，今回の問題 1. (3) や問題 3 のように，実際の計算は一般的に大変です．その原因は，単体の集合が単体複体になるための条件がかなり厳しいことにより，一般的に単体複体はかなりたくさんの単体を含まなければならないことにあります．定義通りの計算は現実的でなく，例えば計算が簡単な部分複体に分割した上で，この後の講義で学ぶ Mayer-Vietoris 完全系列を使うなど，何らかの工夫が必要です．問題 1. (3) を計算するには，$\sigma^n$ を $\sigma^{n-1}$ の「錐複体」とみなすとよく，これについても今後の講義で扱います．参考書の 58 ページを参照してください．

(2)「特異ホモロジー群」は定義が最も簡明で，しかも任意の位相空間に対し定義できます．一方で具体的な計算には全く向かず，むしろ理論的な側面で威力を発揮します．これについては後で少し触れるかもしれません．

(3) 具体的な計算には「胞体複体のホモロジー群」が便利です．単体の代わりに「胞体」という部品を使います．単体複体に比べて胞体の数が非常に少なく済み，チェイン複体が小さくなる（つまり，階数が小さくなる）ので計算しやすくなります．定義するためには（相対）特異ホモロジー群が必要で，導入に手間がかかるのが欠点です．

より高度な視点からの定義もあり得ます．詳しくは

- 玉木大，広がりゆくトポロジーの世界 —言語としてのホモトピー論—，現代数学社

の一読をお薦めします．重要なことは，どの方法で導入したとしても，位相空間 $X$ のホモロジー群 $H_*(X)$ としては（それが定義される限りは）同型なものが得られる，ということです．