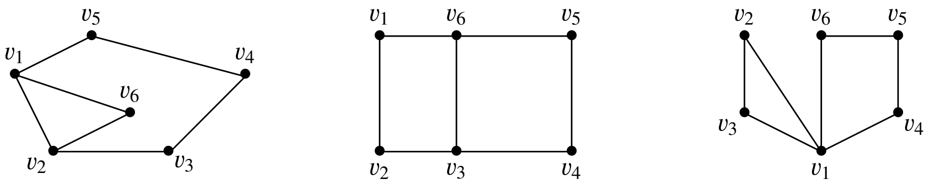
幾何学特別講義 IV レポート問題 2（2017 年 11 月 9 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の数字の下 2 桁を 3 で割った余りを n $(= 0, 1, 2)$ とする．例えば 15S1098P なら $n = 98 \mod 3 = 2$, 15S1076Q なら $n = 76 \mod 3 = 1$.

K_n は下図のような幾何学的実現を持つ 1 次元単体複体とする．11/9 までの講義の内容を使って，$H_i(K_n)$ を計算せよ．



$|K_0|$　　$|K_1|$　　$|K_2|$

ヒント：$H_0(K_n)$ を定義通り計算するのは少し大変．11/9 の講義の内容を使うとよい．

※締切：**11/16**（木）の講義開始時

※代理提出可です.

※締切前の提出も受け付けます．研究室にお越しください.

※提出の必要はありません．レポート問題は裏面をご覧ください．

幾何学特別講義 IV 演習問題 7（2017 年 11 月 9 日）

担当：境 圭一

問題 1. K は 1 次元単体複体で $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ をみたすとする．K が m 個の 0 単体を持つとき，K が持ちうる 1 単体の個数の範囲を求めよ．

問題 2. 単体複体 K_1, K_2 は $|K_1| \cap |K_2| = \{v_0\}$ をみたすとする．

(1) $K := K_1 \cup K_2$ とおくとき，K は単体複体であり，$|K|$ は v_0 における一点和 $|K_1| \vee |K_2|$ と同相であることを示せ．

(2) $i \geq 1$ に対し $H_i(K) \cong H_i(K_1) \oplus H_i(K_2)$ であることを示せ．$H_0(K)$ と $H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ を比較せよ．（ヒント：講義でやった，チェイン複体の直和の議論を参考にせよ）

問題 3. K を単体複体とする．K の k 単体 $\sigma = |v_0 v_1 \cdots v_k|$ で，$\tau := |v_0 \cdots v_{k-1}|$ が他のどの単体の面にもなっていないものがあるとする．

(1) σ も他のどの単体の面にもなっていないことを示せ．

(2) $K' := K \setminus \{\sigma, \tau\}$ とするとき，K' も単体複体で，任意の $n \geq 0$ に対し $H_n(K) \cong H_n(K')$ であることを示せ．

問題 4. K を単体複体とし，準同型 $\epsilon \colon C_0(K) \to \mathbb{Z}$ を，K の各頂点 v に対し $\epsilon(\langle v \rangle) := 1$ で定義する（**添加写像** (augmentation) とよぶ）．

(1) $\cdots \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ はチェイン複体であることを示せ．

(2) (1) のチェイン複体の i 次ホモロジー群を $\widetilde{H}_i(K)$ とおく．つまり $\partial_0 := \epsilon \colon C_0(K) \to \mathbb{Z}, \partial_{-1} := 0 \colon \mathbb{Z} \to 0$ とおき，$\widetilde{H}_i(K) := \operatorname{Ker} \partial_i / \operatorname{Im} \partial_{i+1}$. $|K|$ が弧状連結であるとき

$$\widetilde{H}_{-1}(K) = 0, \quad \widetilde{H}_0(K) = 0, \quad \widetilde{H}_i(K) \cong H_i(K) \quad (i > 0)$$

であることを示せ．$|K|$ が弧状連結でないときはどうか？

補足.

(1) 問題 3 のような状況のとき，K は σ に沿って K' に**つぶれる** (collapse) とか，$|K|$ と $|K'|$ は**単純ホモトピー同値** (simple homotopy equivalent) である，という言い方をします．$k = 1, 2$ くらいで絵を描いてみるといいでしょう．特に $k = 2$ のときが 11/9 の講義でやった内容に関係しています．ループ $\overrightarrow{v_0 v_1 v_2 v_0}$ に対応する $\langle v_0 v_1 \rangle + \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_2 v_0 \rangle \in C_1(K)$ はサイクルで，$H_1(K)$ の元を表しますが，これに対応するループは K' にはありません．しかしこのループは 2 次元曲面 $\langle \sigma \rangle$ の境界になっている，つまり $\langle v_0 v_1 \rangle + \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_2 v_0 \rangle = \partial_2 \langle \sigma \rangle$ であるため $H_1(K)$ の元として 0 ですから，$H_1(K) \cong H_1(K')$ だとしても何の不思議もないことになります．

(2) 問題 4 の $\widetilde{H}_*(K)$ を，K の**被約ホモロジー群** (reduced homology group) とよびます．普通のホモロジー群とだいたい同じものですが，被約ホモロジー群を使うと記述がすっきりする場面がしばしばみられます．例えば講義の例 3.18 でやった $K = K(\sigma)$ の場合，$\widetilde{H}_i(K) = 0$ $(\forall i)$ が成り立ちます．実は一般に，$|K|$ が可縮なら同じ結果が得られます（今後の講義で証明します）．可縮な空間はトポロジーの立場からは「自明な」空間で，そのホモロジー群は全部消えていてほしい，という意識があるので，本当は被約ホモロジー群のほうが自然であると言えます．

(3) 前回やった「単体の向き」について補足します．0 単体の向きの入れ方はただ 1 通り，$\langle v \rangle$ だけです．これは例外で，$n \geq 1$ のとき，n 単体の向きの入れ方は 2 通りあり，講義ではこれらを $\langle v_0 v_1 v_2 \cdots v_n \rangle, \langle v_1 v_0 v_2 \cdots v_n \rangle$ と書きました．後者は $\langle v_1 v_0 v_2 \cdots v_n \rangle = \langle v_0 \cdots v_{n-2} v_n v_{n-1} \rangle$ とも書き直せます．1 単体の 2 通りの向き $\langle v_0 v_1 \rangle$ と $\langle v_1 v_0 \rangle$ は，文字通りの「線分の向き」と解釈することにするとわかりやすいでしょう．$n \geq 2$ のとき，n 単体の向きは以下のように捉えるとよいかもしれません：

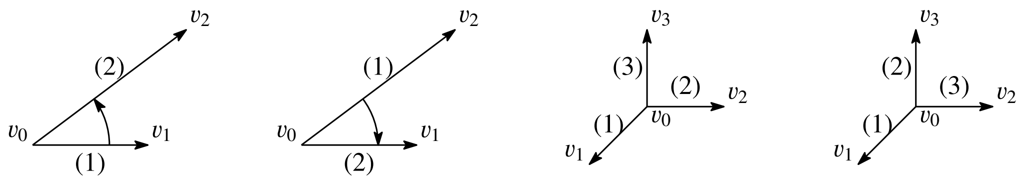
n 単体 $|v_0 \cdots v_n|$ の一つ目の向き $\langle v_0 v_1 \cdots v_n \rangle$ に対応して，順序づけられた n 個のベクトルの組

$$\overrightarrow{v_0 v_1}, \quad \overrightarrow{v_0 v_2}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{v_0 v_{n-2}}, \quad \overrightarrow{v_0 v_{n-1}}, \quad \overrightarrow{v_0 v_n}$$

を考えます．また，もう一つの向き $\langle v_0 \cdots v_{n-2} v_n v_{n-1} \rangle$ に対応して，順序づけられた n 個のベクトルの組

$$\overrightarrow{v_0 v_1}, \quad \overrightarrow{v_0 v_2}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{v_0 v_{n-2}}, \quad \overrightarrow{v_0 v_n}, \quad \overrightarrow{v_0 v_{n-1}}$$

を考えます．例えば $n = 2, 3$ の場合を図示すると以下の通りです．



$\langle v_0 v_1 v_2 \rangle$ $\quad$ $\langle v_0 v_2 v_1 \rangle$ $\quad$ $\langle v_0 v_1 v_2 v_3 \rangle$ $\quad$ $\langle v_0 v_1 v_3 v_2 \rangle$

$n = 2$ のとき，$\overrightarrow{v_0 v_1}$ から $\overrightarrow{v_0 v_2}$ へ向かって測った角度 ($\in [0, \pi]$) について，一方が xy 平面の通常の偏角の方向ならば，もう一方はその逆向きになっています．また $n = 3$ のとき，一方がいわゆる右手系の座標系を表すならば，もう一方は左手系になっていることがわかります．

このように，n 単体の向き，すなわち頂点の順序は，n 次元空間の向き ($n = 2$ なら偏角の向き，$n = 3$ なら右手系・左手系の区別，...) に対応しています．

(4) 前回，単体複体 K から定まるチェイン複体 $C_*(K)$ の境界準同型を定義するときに，向きのついた（単独の）単体 $\langle \sigma \rangle = \langle v_0 \cdots v_n \rangle$ に対し $\partial_n(\langle \sigma \rangle)$ を定義し，準同型になるように拡張する，という言い方をしました．$C_n(K)$ の一般の元は $x = \sum_i a_i \langle \sigma_i \rangle$（各 $a_i \in \mathbb{Z}$, また各 σ_i は n 単体）という形をしており，この x に対しては

$$\partial_n(x) := \sum_i a_i \partial(\langle \sigma_i \rangle)$$

と定義する，という意味です．各 $\partial_n(\langle \sigma_i \rangle)$ の定義は講義でやった通りです．このように，ベクトル空間や $\mathbb{Z}$ 加群の間の写像を定義するときは，基底や生成元の行き先を定め，あとは準同型（線形写像）になるように定義を拡張する，という説明がなされることが多いと思います．