幾何学特別講義 **IV** レポート問題 **2**（**2017** 年 **11** 月 **9** 日）コメント

担当：境 圭一

$n$ によらず答は全員同じで，

$$H_i(K_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & i = 1, \\ 0 & i \geq 2 \end{cases}$$

です．$H_0(K_n) \cong \mathbb{Z}$ であることは，11/9 の講義でやったように，$|K_n|$ が弧状連結であることからわかります．$\operatorname{Im} \partial_2 = 0$ だから $H_1(K_n) \cong \operatorname{Ker} \partial_1$ で，$H_1(K_n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の生成元は，例えば

- $n = 0 : \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_2 v_6 \rangle, \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_2 v_3 \rangle + \langle v_3 v_4 \rangle + \langle v_4 v_5 \rangle + \langle v_5 v_1 \rangle$
- $n = 1 : \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_2 v_3 \rangle + \langle v_3 v_6 \rangle + \langle v_6 v_1 \rangle, \langle v_3 v_4 \rangle + \langle v_4 v_5 \rangle + \langle v_5 v_6 \rangle + \langle v_6 v_3 \rangle$
- $n = 2 : \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_2 v_3 \rangle + \langle v_3 v_1 \rangle, \langle v_1 v_4 \rangle + \langle v_4 v_5 \rangle + \langle v_5 v_6 \rangle + \langle v_6 v_1 \rangle$

を取れます．これらは一例で，他の取り方もあります．$\langle v_i v_j \rangle$ を $\overrightarrow{v_i v_j}$ という矢印に対応させると，上記の生成元が向きの付いたループに対応することに注意してください．これも 11/9 の講義でやったことに対応しています．
答が全員同じであるのは，$|K_n| \simeq S^1 \vee S^1$（ホモトピー同値）であることが背景にあります．ただし $S^1 \vee S^1$ は 11/16 の講義でやった 1 点和 (bouquet) です．そのあたりは今後の講義で明らかになる予定です．

例えば $K_1$ について，

$$\text{“}\, K_1 = K(|v_1 v_2 v_3 v_6|) \cup K(|v_3 v_4 v_5 v_6|) \setminus \{|v_1 v_2 v_3 v_6|, |v_3 v_4 v_5 v_6|\} \,\text{”}$$

のように書いている人がいましたが，これは誤りです．“ $|v_1 v_2 v_3 v_6|$ ” という 3 単体があるわけではありません．また $v_1, v_2, v_3, v_6$ を頂点とする 4 角形が「2 単体」になるわけでもありません．単体の定義を復習してください．
また

$$\text{“}\, \partial_1(C_1(K_2)) = a_1(\langle v_2 \rangle - \langle v_1 \rangle) + a_2(\langle v_3 \rangle - \langle v_2 \rangle) + \cdots \,\text{”}$$

のような書き方も誤りです．左辺は集合，右辺はその集合に属するべき元で，それが等号で結ばれるのは変です．例えば

“ $x = a_1 \langle v_1 v_2 \rangle + a_2 \langle v_2 v_3 \rangle + \cdots \in C_1(K_2)\ (a_1, a_2, \cdots \in \mathbb{Z})$ に対し $\partial_1(x) = a_1(\langle v_2 \rangle - \langle v_1 \rangle) + a_2(\langle v_3 \rangle - \langle v_2 \rangle) + \cdots$ である ”

のような書き方であれば意味が通ります．