

問題 1. K, L, M を単体複体とし, $\Phi: K \rightarrow L, \Psi: L \rightarrow M$ を単体写像とする. このとき $\Psi \circ \Phi: K \rightarrow M$ も単体写像で, チェイン複体に導かれるチェイン準同型について $(\Psi \circ \Phi)_\# = \Psi_\# \circ \Phi_\#$ が成り立つことを示せ. (このことから, ホモロジー群に導かれる準同型についても $(\Psi \circ \Phi)_* = \Psi_* \circ \Phi_*$ が成り立つことがわかる)

問題 2. $v_0 = (0, 0), v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ とおく.

(1) $K := \{v_0, v_1, v_2, v_0v_1, v_1v_2, v_2v_0\}, L := \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_0\}$ について, $|K| \approx |L| \approx S^1$ (同相) を示せ.

(2) $H_n(K), H_n(L)$ を計算せよ.

(3) 単体写像 $\Phi: K \rightarrow L$ を全て求めよ. それぞれについて, $\Phi_*: H_n(K) \rightarrow H_n(L)$ を具体的に記述せよ.

(4) 単体写像 $\Psi: L \rightarrow K$ を全て求めよ. それぞれについて, $\Psi_*: H_n(L) \rightarrow H_n(K)$ を具体的に記述せよ.

問題 3. $n \geq 2$ とし, $v_+ = (0, 0, 1), v_- = (0, 0, -1), 1 \leq k \leq n$ に対し $v_k := \left(\cos \frac{2\pi(k-1)}{n}, \sin \frac{2\pi(k-1)}{n}, 0\right) \in \mathbb{R}^3$ とおく. $K_n := \{v_+, v_-\} \cup \{v_i\}_{1 \leq i \leq n} \cup \{v_+v_-\} \cup \{v_jv_k\}_{j \neq \pm, 1 \leq k \leq n}$ は単体複体であることを示し, $H_l(K_n)$ を計算せよ. (ヒント: Mayer-Vietoris 完全系列を使い, n に関し帰納的に計算する)

補足.

(1) 単体写像は, 位相空間の連続写像に対応するものです. 実際, 単体写像 $\Phi: K \rightarrow L$ があると, 幾何学的実現の間に連続写像 $|\Phi|: |K| \rightarrow |L|$ が次のように定義されます: $x \in |K|$ について, $x \in \sigma$ となる $\sigma = |v_0 \cdots v_n| \in K$ を選んで $x = \sum_i a_i v_i \in \sigma$ と表すとき

$$|\Phi|(x) := \sum_i a_i \Phi(v_i).$$

しかし単体写像は連続写像と比べると融通の利かないものです. 例えば問題 1 の K, L はどちらも S^1 の単体分割ですが, 単体写像 $\Phi: K \rightarrow L$ が導く連続写像 $|\Phi|$ は全て定値写像とホモトピックになることがわかります (確かめてみてください). 一方, 連続写像 $S^1 \rightarrow S^1$ の中には, 定値写像とはホモトピックでないものがたくさんあります. 例えば $\text{id}: S^1 \rightarrow S^1$ はその例です. このようなことが起こる原因は K の単体の数が少ないことにあります. もう少し K を「細分」すれば, 定値写像でないような連続写像も単体写像で「近似」することができるようになります. これは参考書では単体近似定理として紹介されている内容で, 講義でも後で扱います.

(2) Δ^n や $\partial\Delta^n$ のような基本的な単体複体ですら, 定義通りにホモロジー群を計算するのは大変です. これらについては 11/30 に錐複体の例として扱いますが, あらかじめ定義通りやってみておくと, 錐複体や Mayer-Vietoris 完全系列がいかにありがたいものかわかるかもしれません.

Mayer-Vietoris 完全系列を使うときによく現れる議論は次のものです:

完全列 $\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \longrightarrow \cdots$ において

(i) $f = 0$ なら (特に $A = 0$ なら) g は単射

(ii) $h = 0$ なら (特に $D = 0$ なら) g は全射

(iii) $f = 0, h = 0$ なら (特に $A = 0, D = 0$ なら) g は同型

です. もちろん (iii) は (i), (ii) の系です. 講義でやったことではありますが, 不安があれば復習しておいてください. 単体複体 K を, ホモロジー群がよくわかっている部分複体 K_1, K_2 の和にうまく分けることができれば, 上の (i)~(iii) の議論を形式的に使うだけで, $H_*(K)$ は (全てではないにしても) かなり計算できます. ただし写像の具体的な中身をよく見ないとわからない部分もあることには注意が必要です.