幾何学特別講義 IV 演習問題 9（2017 年 11 月 30 日）

担当：境 圭一

問題 1. $v_0, \ldots, v_4 \in \mathbb{R}^3$ は次の (i), (ii), (iii) をみたすとする：

(i) $v_0, \ldots, v_3$ は一般の位置にある

(ii) $v_1, \ldots, v_4$ は一般の位置にある

(iii) $|v_0v_1v_2v_3| \cap |v_1v_2v_3v_4| = |v_1v_2v_3|$

$K_1 := \{|v_0v_1v_2v_3|$ の faces$\} \setminus \{|v_0v_1v_2v_3|\}$, $K_2 := \{|v_1v_2v_3v_4|$ の faces$\}$, $K := K_1 \cup K_2$ とおくとき，Mayer-Vietoris 完全系列を使って次を示せ：

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}, \quad H_2(K) \cong \mathbb{Z}, \quad i \neq 0, 2 \implies H_i(K) = 0$$

ヒント：$K_1 = \partial\Delta^3$, $K_2 = \Delta^3$, $K_1 \cap K_2 = \Delta^2$.

問題 2.

(1) $\mathbb{R}^N \approx \{(x_1, \ldots, x_N, 0) \in \mathbb{R}^{N+1}\}$ とみて $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^{N+1}$ とみなす．また $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^N$ は一般の位置にあるとする．$x = (x_1, \ldots, x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ について，$x_{N+1} \neq 0$ ならば $v_0, \ldots, v_n, x \in \mathbb{R}^{N+1}$ は一般の位置にあることを示せ．

(2) K を n 次元単体複体とするとき，K の錐 $x * K$ は $(n+1)$ 次元単体複体で，K は $x * K$ の部分複体であることを示せ．K の k 単体の数を $b_k(K)$ $(k = 0, \ldots, n)$ とするとき，$b_k(x * K)$ $(k = 0, \ldots, n+1)$ を求めよ．

問題 3. K を単体複体とするとき，$|x * K|$ は可縮であることを示せ．（ヒント：包含写像 $\{x\} \mapsto |x * K|$ がホモトピー同値であることを示す）

問題 4. $v_0, \ldots, v_n$ は一般の位置にあるとし，$0 \leq k \leq n$ に対し $\sigma^k := |v_0 \cdots v_k|$, $\Delta^k := \{\sigma^k$ の faces$\}$, $\partial\Delta^k := \Delta^k \setminus \{\sigma^k\}$ とおく．また $K_1 := \Delta^{n-1}$, $K_2 := \partial\Delta^n \setminus \{\sigma^{n-1}\}$ とおく．

(1) K_1, K_2 は $\partial\Delta^n$ の部分複体であり，$K_1 \cup K_2 = \partial\Delta^n$ であることを示せ．

(2) $K_1 \cap K_2 = \partial\Delta^{n-1}$ であることを示せ．

(3) $K_2 = v_n * (K_1 \cap K_2)$ であることを示せ．

(4) $n \geq 3$ とする．$\langle v_0 \rangle, \ldots, \langle v_{n-1} \rangle$ はいずれも $H_0(K_i) \cong \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2)$ ならびに $H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元であることを示せ．また各 $k = 0, \ldots, n-1$ に対し，$(i_{1*}, i_{2*}) : H_0(K_1 \cap K_2) \to H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ は $\langle v_k \rangle \mapsto (\langle v_k \rangle, \langle v_k \rangle)$ と表せることを示せ．（問題 7 も参照せよ）

問題 5. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle v_0 \cdots \overset{\wedge}{\underset{i}{\cdot}} \cdots v_n \rangle \in C_{n-1}(\partial\Delta^n)$ がサイクルであることを示せ．

問題 6. $H_*(\partial\Delta^1)$ を計算し，$H_*(\partial\Delta^n)$ $(n \geq 2)$ と比較せよ．

問題 7. K は単体複体で，$|K|$ は k 個の弧状連結成分を持つとする．各弧状連結成分に含まれる頂点を一つずつ（任意に）取り，それらを $v_1, \ldots, v_k$ とおくとき，$H_0(K) = \langle \langle v_1 \rangle, \ldots, \langle v_k \rangle \mid \rangle \cong \mathbb{Z}^{\oplus k}$ であることを示せ．

補足．問題 1 は，$K_1 \cap K_2 = \{|v_1v_2v_3|$ の faces$\} \approx \Delta^2$ であることと，講義でやった $H_i(\Delta^n), H_i(\partial\Delta^n)$ の計算を用いるとよいでしょう．

$\partial\Delta^n$ を問題 3 のように分割して Mayer-Vietoris 完全系列を用いると，$H_{n-1}(\partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$ であることが証明できます．この同型により $1 \in \mathbb{Z}$ に対応する $H_{n-1}(\partial\Delta^n)$ の元を v とおくと，$H_{n-1}(\partial\Delta^n)$ の任意の元は v の整数倍で表されます．このような元を生成元といいますが，$H_{n-1}(\partial\Delta^n)$ の生成元はどれか，ということは，Mayer-Vietoris 完全系列からは必ずしも明らかではありません．

問題 4 のサイクルは $Z_{n-1}(\partial\Delta^n)$ の 0 でない元で，明らかに $B_n(\partial\Delta^n) = 0$ ですから，$H_{n-1}(\partial\Delta^n) = Z_n(\partial\Delta^n)$ の 0 でない元を表すことはわかります．実は問題 4 のサイクルは生成元で，そのことは以下のようにしてわかります：

$\partial\Delta^n$ の $n-1$ 単体は $\binom{n+1}{n} = n+1$ 個，$\sigma_i := |v_0 \cdots \underset{i}{\overset{\wedge}{\cdot}} \cdots v_n|$ $(i = 0, \ldots, n)$ です．$x := \sum_{0 \le i \le n} a_i \langle \sigma_i \rangle \in Z_{n-1}(\partial\Delta^n)$ と仮定しましょう．二つの $n-1$ 単体 σ_i, σ_j $(i < j)$ は，ちょうど一つの $n-2$ 単体 $\sigma_{ij} := |v_0 \cdots \underset{i}{\overset{\wedge}{\cdot}} \cdots\cdots \underset{j}{\overset{\wedge}{\cdot}} \cdots v_n|$ を共通の面に持ち，σ_{ij} を面に持つ $n-1$ 単体は他にありません．よって $\partial_{n-1}(x)$ $(= 0)$ の計算の中に出てくる $\langle \sigma_{ij} \rangle$ の係数 $(= 0)$ は，符号に注意すると，$(-1)^{j+1} a_i + (-1)^i a_j$ $(= 0)$ であることがわかります．このことから $a_0 = -a_1 = a_2 = \cdots = (-1)^n a_n$ がわかり，x は問題 4 のサイクルの整数倍であることがわかりました．