幾何学特別講義 IV 小テスト（2017 年 12 月 7 日）解説・コメント

担当：境 圭一

演習問題 9 の問題 1 が $n=3$ の場合です．やることは全く同じで，違いは $n \geq 4$ なので絵を描けないことだけです．イメージをつかむため絵を描くことは幾何学をやる上で非常に大切ですが，一方で絵にとらわれると，今回のように正確な絵を描けない場合は逆に混乱するかもしれません．機械的に $H_i(K_1), H_i(K_2), H_i(K_1 \cap K_2)$ を Mayer-Vietoris 完全系列にあてはめる，という割り切った考え方をしたほうがいいかもしれません．計算結果を見ることで，逆に $|K|$ は大体 S^{n-1} のような形をしているという幾何学的なイメージが見えてきます．

以下，問題の $H_*(K)$ について，計算方法の一例（の概略）を述べます．まず $K_1 = \partial\Delta^n, K_2 = \Delta^n, K_1 \cap K_2 = \Delta^{n-1}$ ですから，講義でやったように

$$H_i(K_1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, n-1 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} \qquad H_i(K_2) \cong H_i(K_1 \cap K_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

です．

● $|K|$ は弧状連結ですから $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ です．絵を描けば納得できるとは思いますが，詳しくは次のように示されます．まず一般に $|\Delta^n|$ は弧状連結です．実際，Δ^n の頂点を $v_0, \ldots, v_n$ とするとき，任意の $x \in |\Delta^n|$ は

$$x = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i, \text{ ただし } a_i \geq 0, \quad \sum_i a_i = 1$$

と表せます．このような 2 点 $x = \sum_{i=0}^n a_i v_i$ と $y = \sum_{i=0}^n b_i v_i$ に対し

$$\gamma(t) := (1-t)x + ty = \sum_{i=0}^{n} ((1-t)a_i + tb_i)v_i \quad (0 \leq t \leq 1)$$

も $|\Delta^n|$ の点です．なぜなら $a_i, b_i \geq 0$ と $0 \leq t \leq 1$ より $(1-t)a_i + tb_i \geq 0$ であり

$$\sum_{i=0}^{n} \Big((1-t)a_i + tb_i\Big) = (1-t)\sum_{i=0}^{n} a_i + t\sum_{i=0}^{n} b_i = (1-t) + t = 1$$

だからです．よって $x, y \in \Delta^n$ は道 $\gamma\colon [0,1] \to |\Delta^n|$ で結べることになります．
$|K_1|$ は n 個の Δ^{n-1} の和集合を取ったもので，その共通部分は空でないので弧状連結です．また $|K_2| = |\Delta^n|$ も弧状連結です．$|K| = |K_1| \cup |K_2|$ かつ $|K_1| \cap |K_2| \neq \emptyset$ なので，$|K|$ も弧状連結です．

●次に $H_1(K)$ を考えます．$(*)$ より，Mayer-Vietoris 完全系列は次のようになります：

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) & \longrightarrow & H_1(K) & \longrightarrow & H_0(K_1 \cap K_2) & \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} & H_0(K_1) \oplus H_0(K_2) & \longrightarrow \cdots \\ & \| & & & & \| & & \| & \\ & 0 & & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \end{array}$$

$H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元として例えば v_1 を選ぶと，$(i_{1*}, i_{2*})(v_1) = (v_1, v_1)$ ですから (i_{1*}, i_{2*}) は単射です．よって上の列の完全性から $H_1(K) = 0$ です．

● $i \geq 2, i \neq n-1$ に対し $H_i(K)$ を考えます．$(*)$ より，Mayer-Vietoris 完全系列は次のようになります：

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & H_i(K_1) \oplus H_i(K_2) & \longrightarrow & H_i(K) & \longrightarrow & H_{i-1}(K_1 \cap K_2) & \longrightarrow \cdots \\ & \| & & & & \| & \\ & 0 & & & & 0 & \end{array}$$

この列の完全性から $H_i(K) = 0$ です．上に述べた $i = 1$ のときと結果は同じですが，0 になる理由が少し違います．

●最後に $H_{n-1}(K)$ を考えます．$(*)$ より，Mayer-Vietoris 完全系列は次のようになります：

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & H_{n-1}(K_1 \cap K_2) & \longrightarrow & H_{n-1}(K_1) \oplus H_{n-1}(K_2) & \longrightarrow & H_{n-1}(K) & \longrightarrow & H_{n-2}(K_1 \cap K_2) & \longrightarrow \cdots \\ & \| & & \| & & & & \| & \\ & 0 & & \mathbb{Z} \oplus 0 & & & & 0 & \end{array}$$

この列の完全性から $H_{n-1}(K) \cong \mathbb{Z}$ です.

以上まとめると
$$H_i(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, n-1 \\ 0 & i \neq 0, n-1 \end{cases}$$
です. $H_i(\partial\Delta^n)$ と同型なのは偶然でなく, $|K| \simeq |\partial\Delta^n| \approx S^{n-1}$ であることが背景にあります.