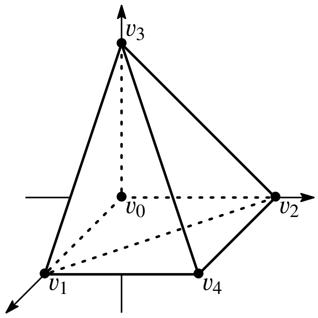
幾何学特別講義 IV 演習問題 11（2017 年 12 月 14 日）

担当：境 圭一



問題 1. $v_0 = \mathbf{0}, v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1), v_4 = (1,1,0) \in \mathbb{R}^3$ とし，

$$L_1 := K(|v_0v_1v_2v_3|) \setminus \{|v_0v_1v_2v_3|\} \quad (= \partial\Delta^3),$$
$$L_2 := K(|v_0v_1v_2|) \cup K(|v_1v_2v_4|) \cup K(|v_0v_1v_3|) \cup K(|v_0v_2v_3|) \cup K(|v_1v_3v_4|) \cup K(|v_2v_3v_4|)$$

とおく．ただし $K(\sigma)$ は単体 σ のすべての面単体からなる単体複体である．

(1) $|L_1| \approx |L_2| \approx S^2$ であることを示せ．

(2) $H_*(L_1), H_*(L_2)$ を定義通り計算し比較せよ．

問題 2. $\sigma = |v_0 \cdots v_n|$ を n 単体とし，$K = K(\sigma)$ をその面単体すべてからなる単体複体とする．$D(K)$ に含まれる 0 単体，n 単体の個数をそれぞれ求めよ．

問題 3. 演習問題 8 (11/16) の問題 2 の単体複体 K, L（どちらも S^1 の単体分割だった）について，すべての単体写像 $K \to L$ は可縮な連続写像 $S^1 \to S^1$ に対応することを示せ（演習問題 8 の「補足」参照）．一方，単体写像 $D(K) \to L$ の中には可縮でない連続写像 $S^1 \to S^1$ に対応するものがあることを示せ．

問題 4. 単体複体 K の n 単体 $\sigma = |v_0 \cdots v_n|$ の面 $|v_{i_0} \cdots v_{i_k}|$ の重心を $v_{i_0 \dots i_k}$ と書く．チェイン写像 $D_n \colon C_n(K) \to C_n(D(K))$ を，講義では帰納的に定義した．具体的には

$$D_n\langle v_0 \cdots v_n\rangle = \sum_{\rho \in S_{n+1}} \mathrm{sign}(\rho)\langle v_{\rho(0)} v_{\rho(0)\rho(1)} \cdots v_{\rho(0)\dots\rho(n)}\rangle$$

が成り立つことを示せ．ただし $n+1$ 次対称群 S_{n+1} の元 ρ は全単射 $\rho \colon \{0,\dots,n\} \to \{0,\dots,n\}$ とみなす．

問題 5. 参考書の問題 1.9 を参考に，n 単体 σ の重心細分 $D(\sigma)$ が n 次元単体複体をなし，$|D(\sigma)| = \sigma$ をみたすことを示せ．また参考書の問題 1.10 を参考に，単体複体 K の重心細分 $D(K)$ が単体複体をなし，$\dim D(K) = \dim K$ と $|D(K)| = |K|$ をみたすことを示せ．

問題 6. 単体複体 K の部分複体 K_1, K_2 が $K = K_1 \cup K_2$ をみたしているとき，

$$D(K) = D(K_1) \cup D(K_2), \quad D(K_1 \cap K_2) = D(K_1) \cap D(K_2)$$

であることを示せ．

問題 7. 単体複体 K の部分複体 K_1, K_2 が $K = K_1 \cup K_2$ をみたしているとし，$D(K), D(K_1), D(K_2)$ を（スペースの都合で）それぞれ L, L_1, L_2 とおく．講義で省略した

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(K_1 \cap K_2) \arrow[r] \arrow[d, "D_n"'] & H_n(K_1) \oplus H_n(K_2) \arrow[r] \arrow[d, "D_n \oplus D_n"'] & H_n(K) \arrow[r] \arrow[d, "D_n"'] & H_{n-1}(K_1 \cap K_2) \arrow[r] \arrow[d, "D_{n-1}"'] & H_{n-1}(K_1) \oplus H_{n-1}(K_2) \arrow[r] \arrow[d, "D_{n-1} \oplus D_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(L_1 \cap L_2) \arrow[r] & H_n(L_1) \oplus H_n(L_2) \arrow[r] & H_n(L) \arrow[r] & H_{n-1}(L_1 \cap L_2) \arrow[r] & H_{n-1}(L_1) \oplus H_{n-1}(L_2) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

の可換性を示せ．

補足．演習問題 8 (11/16) の「補足」で述べたように，単体写像 $K \to L$ は連続写像に比べて融通の利かないものです．単体写像は「単体を単体にうつす写像」なので，K が少ない数の単体を大雑把に貼り合わせたものになっていると，L の単体に「うまくはまらない」ということが起こるのが原因です．重心細分 $D(K)$ においては，K において 1 本の辺だったり 1 枚の面だったりした部分が複数の辺や面に細かく分割され，より滑らかな図形に近づくため，単体写像も作りやすくなります．問題 3 を参照してください．

講義で見たように $H_*(K) \cong H_*(D(K))$ ではありますが，重心細分は単体の数をかなり派手に増やす操作なので（問題 2 参照），$H_*(D(K))$ の計算は $H_*(K)$ より大変です．$D(K)$ はあくまで論理的な場面で威力を発揮するものです．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_homology/17_homology.html