幾何学特別講義 **IV** レポート問題 **4**（**2017** 年 **12** 月 **21** 日）

担当：境 圭一

各自の学籍番号の下 2 桁を k とし，$n := k \bmod 3\ (= 0, 1, 2)$ とする．例えば 15S1067P なら $n = 1$, 15S1089Q なら $n = 2$.

$\mathbb{R}^2$ に通常の Euclid 位相を与え，部分位相空間 $X_n \subset \mathbb{R}^2\ (n = 0, 1, 2)$ を以下のように定める．X_n の単体分割を 1 つ与え，12/21 までの講義の内容に基づいて $H_i(X_n)$ を計算せよ．

$$X_0 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} x^2 + (y-2)^2 \le 4, \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \ge \dfrac{1}{4},\ (x+1)^2 + (y-2)^2 \ge \dfrac{1}{4} \end{array} \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + (y+3)^2 \le 9 \right\}$$

$$\begin{aligned} X_1 := &\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \le 4,\ 0 \le y \le 2 \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge |x| - 4,\ -2 \le y \le -1 \right\} \\ &\cup \left\{ (0, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} -5 \le y \le -4 \\ \text{または } 2 \le y \le 4 \end{array} \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = |x| - 4,\ |x| \le 4 \right\} \end{aligned}$$

$$X_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \le 1, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 \ge \dfrac{1}{4},\ (x-2)^2 + \dfrac{y^2}{4} \ge 1 \end{array} \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x+4)^2 + y^2 \le \dfrac{1}{4} \right\}$$

ヒント：単体分割の方法については，演習問題 12（裏面）が参考になるかもしれない

※締切：**1/11**（木）の講義開始時

※代理提出可です

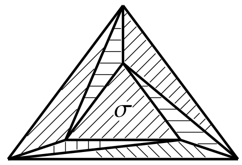
※締切前の提出も受け付けます．研究室にお越しください．

幾何学特別講義 IV 演習問題 12（2017 年 12 月 21 日）

担当：境 圭一

※提出の必要はありません．レポート問題は裏面をご覧ください．

問題 1. K を図のような 2 次元単体複体とする．



(1) $D^2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\boldsymbol{x}| \le 1\}$ とおく．$|K| \approx D^2$（同相）であることを示せ．

(2) $A := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le |\boldsymbol{x}| \le 2\}$ を図示せよ．図中の 2 単体 σ に対し，$L := K \setminus \{\sigma\}$ とおくとき，$|L|$ は A と同相であることを示せ．（注．A をアニュラス (annulus) とよぶ）

(3) $H_i(A)$ $(\cong H_i(L))$ を計算せよ．

(4) D^2 の内部に互いに交わらない開円板 $d_1, \dots, d_n$ を取り，$Y_n := D^2 \setminus \bigcup_{k=1}^{n} d_k$ とおく．$H_i(Y_n)$ を計算せよ．
ヒント：上の L を 2 つ用意し，1 つの辺で貼り合わせると Y_2 の単体分割を得る．一般の n に対しても同様で，L を n 個貼り合わせればよい．$H_*(Y_n)$ は Mayer-Vietoris 完全系列で n に関し帰納的に計算できる．

(5) $S^1 \approx |\partial\Delta^2|$ であることを示せ．これを使って $H_i(S^1)$ を計算せよ．

(6) $A \simeq S^1$（ホモトピー同値）であることを示せ．$H_i(A)$ と $H_i(S^1)$ を比較せよ．

問題 2. $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1), v_3 = (-1,0), v_4 = (0,-1) \in \mathbb{R}^2$ とする．

(1) $K = \{|v_1|, |v_2|, |v_3|, |v_4|, |v_1v_2|, |v_2v_3|, |v_3v_4|, |v_4v_1|\}$ とおく．K は単体複体で，$|K| \approx S^1$ であることを示せ．

(2) $H_i(K)$ を計算し，$H_i(S^1)$ と比較せよ．

(3) $L := K \cup \{|v_1v_3|\}$ とおく．L は単体複体であることを示し，$H_i(L)$ を計算せよ．$|L|$ はどんな位相空間と同相か？

(4) $S^1 \vee S^1$ の単体分割を 1 つ与え，$H_i(S^1 \vee S^1)$ を計算せよ．ただし $\vee$ は一点和を表す．

(5) $|L| \simeq S^1 \vee S^1$ であることを示せ．$H_i(L)$ と $H_i(S^1 \vee S^1)$ を比較せよ．

問題 3. $X := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1\} \cup \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0\}$ とおく．

(1) xy 平面上に 2 単体 $\sigma = |v_0v_1v_2|$ を取り，$v_3 := (0,0,1)$ とおいて $K := K(\sigma) \cup \{|v_3|, |v_3v_0|, |v_3v_1|\}$ とおく．K は単体複体で，$|K| \approx X$ であることを示せ．

(2) $H_i(X)$ を計算せよ．

(3) $X \simeq S^1$ であることを示せ．$H_i(X)$ と $H_i(S^1)$ を比較せよ．

問題 4. $X := S^2 \cup \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \le \dfrac{1}{2}\right\}$ とおく．ただし $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ である．単体複体 K を，小テスト 3 (12/7) の単体複体の $n = 3$ の場合のものとするとき，$X \approx |K|$ であることを示せ．これを用いて $H_i(X)$ を計算せよ．

問題 5. 演習問題 8 (11/16) の問題 2 の K, L について，$\mathrm{id}_{S^1} \colon S^1 \to S^1$ の単体近似 $K \to L$ は存在しないことを示せ．id_{S^1} の単体近似 $D(K) \to L$ を 1 つ構成せよ．

補足．12/21 までにやったことにより，単体分割可能な位相空間 X のホモロジー群 $H_n(X)$ を，単体分割 $X \approx |K|$ を 1 つ取って $H_i(X) := H_i(K)$ で定義することができるようになりました．この定義は K の取り方によりません．
基本的な例として，同相

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 1\} \approx |\Delta^n|, \quad S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \approx |\partial\Delta^{n+1}|$$

と講義でやったことを合わせると，次のことがわかります：

$$H_i(D^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, \\ 0 & i \ne 0, \end{cases} \qquad H_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, n, \\ 0 & i \ne 0, n. \end{cases}$$

一般には，$D^n \approx \Delta^n$ や $S^n \approx \partial\Delta^{n+1}$ をうまく貼り合わせて，$|K| \approx X$ となるような K を構成します．単体複体の定義をよく見て，K が単体複体になるよう注意してください．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_homology/17_homology.html