幾何学特別講義 **IV** レポート問題 **4**（**2017** 年 **12** 月 **21** 日）解説・コメント

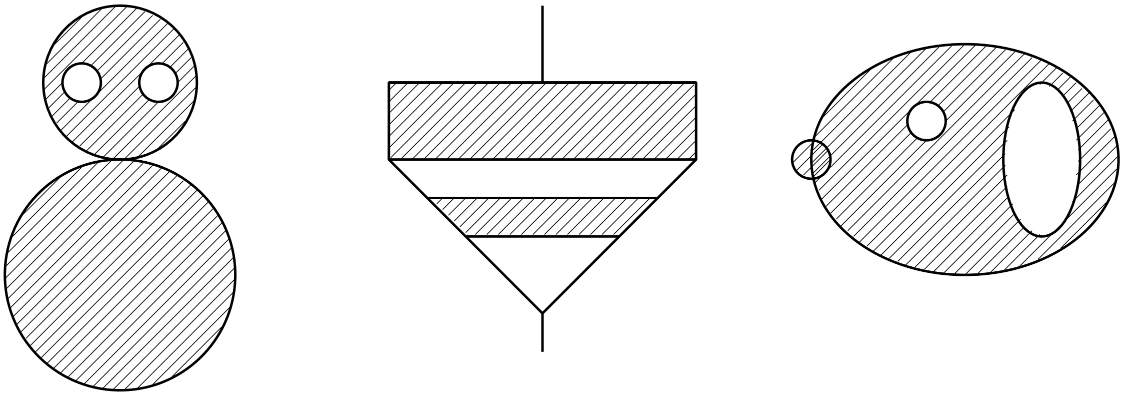
担当：境 圭一

X_n と，その単体分割の例は下図 1, 2 に示した通りです．答は

$$H_k(X_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0, \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & k=1, \\ 0 & k\neq 0,1 \end{cases}$$

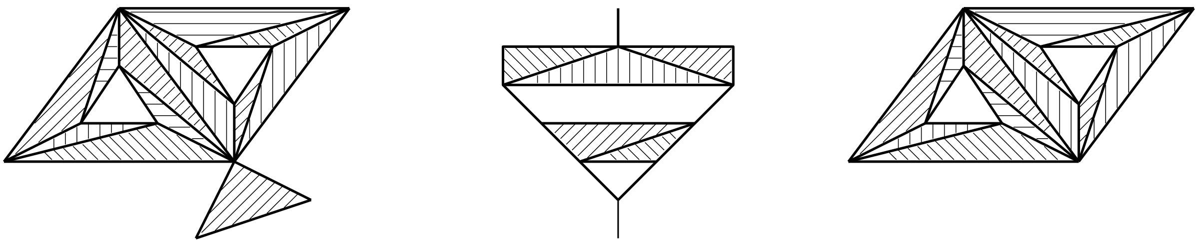
です．答が n に依存しないのは，n によらず $X_n \simeq S^1 \vee S^1$（1 点和）であることが背景にあります．

X_n の単体分割について述べます．X_2 は，（鼻の部分も含めて）D^2 内部の互いに交わらない開円板を 2 枚除いて得られる図形と同相です．X_2 にもう 1 枚の D^2 を 1 点和したものが X_0 と同相です．小円板を 1 枚除いた場合の単体分割は，例えば 12/21 の演習問題 1 の L で与えられます．図 2 の K_2 は，この L を辺に沿って 2 つ貼り合わせたものです．貼り合わせの周辺をもう少し工夫すれば，単体をもう少し減らせるかもしれません．これにもう 1 枚の 2 単体 ($\cong D^2$) を 1 点和すれば X_0 の単体分割 K_0 を得ます．X_1 はノーヒントですが，単体分割は X_1 が最も容易でしょう．



X_0　　X_1　　X_2

図 1　X_n $(n=0,1,2)$



K_0　　K_1　　K_2

図 2　X_n の単体分割

$H_*(X_n)$ の計算について述べます．まず $H_*(X_2)$ を求めるため，$H_k(L)$ を計算します．定義通りやってもよいのですが大変でしょう．12/21 の演習問題 1 の記号で，$|L\cup K(\sigma)| \approx |\Delta^2|$, $|L\cap K(\sigma)| \approx |\partial\Delta^2|$ であることに注意して Mayer-Vietoris を使うのが簡単かもしれません．

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \longrightarrow & H_{k+1}(L\cup K(\sigma)) & \longrightarrow & H_k(L\cap K(\sigma)) & \longrightarrow & H_k(L)\oplus H_k(K(\sigma)) & \longrightarrow & H_k(L\cup K(\sigma)) & \longrightarrow \cdots \\ & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & \\ & H_{k+1}(\Delta^2) & & H_k(\partial\Delta^2) & & H_k(L)\oplus H_k(\Delta^2) & & H_k(\Delta^2) & \end{array}$$

は完全で，$k\geq 1$ のとき，両端の群と $H_k(\Delta^2)$ は自明でしたから，

$$H_k(L) \cong H_k(\partial\Delta^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k=1 \\ 0 & k\geq 2 \end{cases}$$

を得ます．K_2 は L を 2 つ用意して辺 (Δ^1) で貼り合わせたものですから，再び Mayer-Vietoris により

$$\cdots \longrightarrow H_k(\Delta^1) \longrightarrow H_k(L) \oplus H_k(L) \longrightarrow H_k(K_2) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(\Delta^1) \longrightarrow \cdots$$

は完全です．$k \geq 2$ なら両端の群は自明で，$k = 1$ のときも $\delta = 0$ ですから（これは $H_0(\Delta^1) \to H_0(L) \oplus H_0(L)$ が単射であることによります），$k \geq 1$ のとき

$$H_k(K_2) \cong H_k(L) \oplus H_k(L) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

です．$|K_2|$ は弧状連結なので

$$H_k(K_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

となります．
$H_*(X_0)$ はほとんど同様です．$K_0 = K_2 \vee \Delta^2$（1 点和）ですから，$k \geq 1$ のときは $H_k(K_0) \cong H_k(K_2) \oplus H_k(\Delta^2) \cong H_k(K_2)$ です．$|K_0|$ は弧状連結なので $H_0(K_0) \cong \mathbb{Z}$ です．
$H_*(X_1)$ についても同様で，「空洞部分」を埋めることにより Mayer-Vietoris 完全系列を利用することができますが，$H_*(K_1)$ くらいなら頑張って定義通り計算することもできるかもしれません．

提出された答案では，例えば $H_*(L)$ の計算などを定義通りやっているものが多かったようです．このときに注意しないといけないのは，L に関しては $\operatorname{Ker}\partial_1 \cong \mathbb{Z}^{\oplus 7}$, $\operatorname{Im}\partial_2 \cong \mathbb{Z}^{\oplus 6}$ なのですが，だからといって

$$\text{“} H_1(L) = \mathbb{Z}^{\oplus 7}/\mathbb{Z}^{\oplus 6} \cong \mathbb{Z} \text{”}$$

というのは早計です（結果的には正しいが）．基底を然るべく取ることにより，

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Ker}\partial_1 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}^{\oplus 7} \\ \cup & & \cup \\ \operatorname{Im}\partial_2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}^{\oplus 6} \oplus 0 \end{array}$$

が可換となるように横の同型を取れる，というところまで見ないといけません．そうしないと次のような誤りの危険があります：例えば $G = \langle x \mid \ \rangle$ の部分群 $H = \langle 2x \mid \ \rangle$ について，G, H ともに $\mathbb{Z}$ と同型ですが，$G/H \cong \langle x \mid 2x \rangle \cong \mathbb{Z}/2$ で，$\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$ とは異なります．