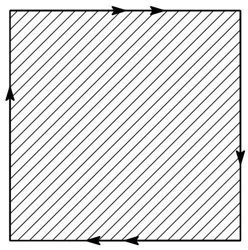
幾何学特別講義 **IV** レポート問題 **5**（**2018** 年 **1** 月 **11** 日）

担当：境 圭一

$I := [0,1]$ とし，$I \times I$ の向かい合う辺を図のように同一視して得られる空間を X とおく．$H_k(X)$ を計算せよ．ただし X が単体分割可能である事実は認めてよい．



ヒント．講義でやったトーラスの計算や，演習問題 13 (1/11) 問題 3 を参照せよ．$I \times I$ 内部の 2 単体と，それ以外の部分に分けるとよい．どちらもホモトピーで変形すれば簡単な図形になる．トーラスの場合は四隅の頂点はすべて同じ点を表していたが，この図形ではそうではないことに注意せよ．

※締切：**1/18**（木）の講義開始時
※代理提出可です
※締切前の提出も受け付けます．研究室にお越しください．

幾何学特別講義 IV 演習問題 13（2018 年 1 月 11 日）

担当：境 圭一

問題 1. 小テスト 3 (12/7) の単体複体 K について，$|K| \simeq S^{n-1}$（ホモトピー同値）であることを示せ．これを用いて $H_k(K)$ を計算せよ．

問題 2. レポート問題 4 (12/21) の位相空間 X_n $(n = 0, 1, 2)$ について，$X_n \simeq S^1 \vee S^1$ であることを示せ．これを用いて $H_k(X_n)$ を計算せよ．

問題 3. $I := [0, 1]$ とし，$I \times I$ の向かい合う辺を下図のように同一視して得られる空間を Y とおく．

(1) Y の単体分割 $|K| \xrightarrow{\approx} Y$ を 1 つ選ぶ．$I \times I$ の内部に対応する部分に含まれる 2 単体 σ を 1 つ選んで $L_1 := K \setminus \{\sigma\}$ とおく．$|L_1| \simeq S^1 \vee S^1$ であることを示せ．

(2) $L_2 := K(\sigma)$ とおく．$H_k(L_1), H_k(L_2), H_k(L_1 \cap L_2)$ を計算せよ．

(3) 単体複体 K において，$I \times I$ の縦と横の辺が，矢印の向きに沿って，それぞれ 1 単体 $\langle e_1\rangle, \dots, \langle e_s\rangle$ と $\langle f_1\rangle, \dots, \langle f_t\rangle$ で分割されているとする（このとき $H_1(L_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の生成元として $\sum_{i=1}^{s}\langle e_i\rangle$ と $\sum_{i=1}^{t}\langle f_i\rangle$ を取れる）．また σ の 3 辺を，反時計回りの向きで $\langle a\rangle, \langle b\rangle, \langle c\rangle$ とおく（このとき $H_1(L_1 \cap L_2) \cong \mathbb{Z}$ は $\langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle$ で生成される）．$i_1 \colon L_1 \cap L_2 \to L_1$, $i_2 \colon L_1 \cap L_2 \to L_2$ をそれぞれ包含写像とするとき，1 次ホモロジー群上の写像として

$$i_{1*}(\langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle) = 2\sum_{i=1}^{s}\langle e_i\rangle, \quad i_{2*}(\langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle) = 0$$

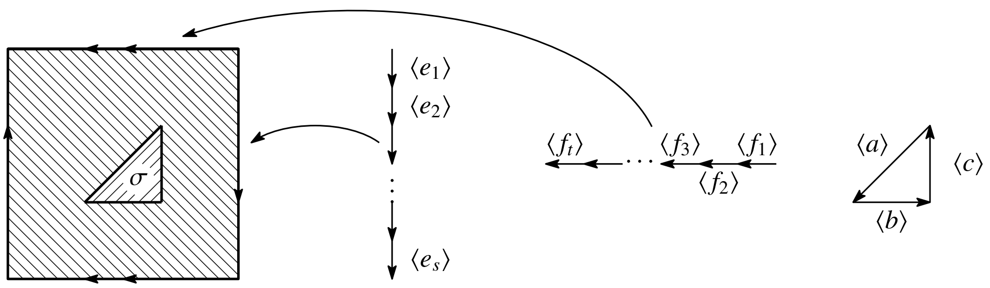
であることを示せ．（このことから $(i_{1*}, i_{2*}) \colon H_1(L_1 \cap L_2) \to H_1(L_1) \oplus H_1(L_2)$ は単射であることがわかる）

(4) Mayer-Vietoris 完全系列を用いて

$$H_0(Y) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(Y) \cong (\mathbb{Z}/2) \oplus \mathbb{Z}, \quad H_k(Y) = 0 \quad (k \neq 0, 1)$$

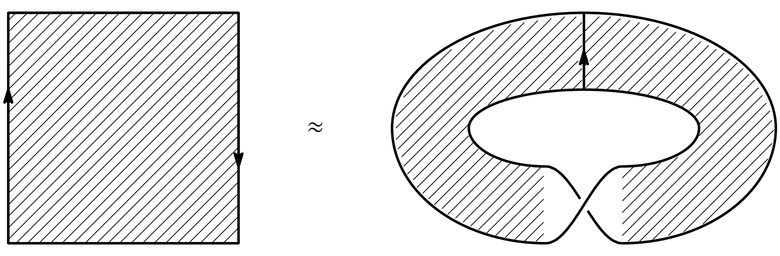
であることを示せ．

注意. K の具体的な中身は重要でないことに注意せよ．Y はクラインの壺 (Klein bottle) とよばれる図形である．ホモロジー群を比較することにより，Y とトーラスはホモトピー同値ではないことがわかる．



Y　　縦の辺　　横の辺　　σ

問題 4. 各 $0 \leq t \leq 1$ について，$I \times I$ 上の点 $(0, t)$ と $(1, 1 - t)$ を同一視して得られる図形 M をメビウスの帯 (Möbius band) とよぶ（つまり，正方形の紙の縦の辺を「逆向きで」貼り合わせて得られる「裏表の区別のない帯」である）．$H_k(M)$ を計算せよ．



補足.

(1) 証明を先延ばしにしていますが，単体複体 K, L が $|K| \simeq |L|$（ホモトピー同値）をみたすとき，$H_*(K) \cong H_*(L)$ が成り立ちます．このことから，位相空間 X 自体が単体分割可能でなくても，単体分割可能な Y とホモトピー同値であれば，X のホモロジー群 $H_k(X)$ を $H_k(X) := H_k(Y)\ (= H_k(K)$, ただし K は単体複体で $|K| \approx Y)$ で定義することができます．実際，Y' も同じ条件をみたすとすれば，Y, Y' の単体分割 K, K' について $|K| \approx Y \simeq X \simeq Y' \approx |K'|$ ですから $H_k(K) \cong H_k(K')$ です．つまり，$H_k(X)$ は Y, K の選び方によらずに決まります．

(2) ホモロジー群のホモトピー不変性がわかると，

$$\exists k,\ H_k(X) \not\cong H_k(Y) \implies X \not\simeq Y$$

が直ちに従います．つまり，ホモロジー群は二つの位相空間がホモトピー同値でない（従って，同相でもない）ことを示したいときに重要な道具となります．例えば，講義でやったトーラス $T^2 := S^1 \times S^1$ についての計算結果から $H_1(S^2) \not\cong H_1(T^2)$ がすぐにわかりますから，S^2 と T^2 はホモトピー同値でないことがわかります．**逆は不成立**で，$H_k(X) \cong H_k(Y)\ (\forall k)$ だが $X \not\simeq Y$ となる位相空間 X, Y の例はたくさんあります．

(3) ホモトピー不変性は，計算も劇的に容易にしてくれます．問題 1, 2 にあるように，ホモトピー不変性を知っていれば，小テスト 3 やレポート問題 4 はずっと易しかったことでしょう．また，これまでは $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \approx |\Delta^n|$ のホモロジー群も決して易しくはありませんでしたが，D^n は**可縮** (contractible), つまり D^n は 1 点集合とホモトピー同値であることから，ただちに $H_0(D^n) \cong \mathbb{Z}$, $H_k(D^n) = 0\ (k \geq 0)$ がわかります．また T^2 のホモロジー群は，定義通りに計算するといかに大変なことになるかが参考書に書いてありますが，ホモトピー不変性を示した後なら，講義でやったように，もうちょっと健全な計算が可能です．それなら最初からホモトピー不変性を証明すればよかったのでは，と考えるかもしれませんが，例えば重心細分がホモロジー群を変えないことを示すときに $H_k(D^n)$ の計算結果が必要でしたから，決して不要な回り道をしたわけではありません．

(4) ここまで来れば，簡単な位相空間については

- (i) ホモロジー群のホモトピー不変性，
- (ii) Mayer-Vietoris 完全系列，
- (iii) $H_*(D^n), H_*(S^n)$ の計算結果

を使えば大抵はホモロジー群を計算でき，2 つの位相空間がホモトピー同値か否か（ある程度）判定できます．