幾何学特別講義 **IV** レポート問題 **5**（**2018** 年 **1** 月 **11** 日）解答・コメント

担当：境 圭一

結論は

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \\ \mathbb{Z}/2 & n=1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

です．

トーラスの場合と同じようにして計算できます．適当な単体分割 K を取り（その具体的な形は重要ではない），正方形内部の 2 単体 σ を一つ選んで

$$K_1 := K(\sigma), \quad K_2 := K \setminus \{\sigma\}$$

とおいて Mayer-Vietoris 完全系列を使います．

$H_1(K_1 \cap K_2) \cong H_1(\partial\Delta^2) \cong \mathbb{Z}$ で $1 \in \mathbb{Z}$ に対応する元として，$\partial\sigma$ を一周回るループに対応する 1 サイクルを取れます．これを $[x] \in H_1(K_1 \cap K_2)$ としておきます．トーラスの場合と異なり $|K_2| \simeq S^1$ なので，$H_2(K_2) = 0, H_1(K_2) \cong \mathbb{Z}$ です．$H_1(K_2)$ の生成元 $1 \in \mathbb{Z}$ に対応する元として，正方形の「縦の辺」と「横の辺」を合わせたループに対応するサイクルを取れます．もう少し正確に言うと，単体複体 K において，正方形の「縦の辺」が 1 単体 $\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_s \rangle$ で，「横の辺」が 1 単体 $\langle f_1 \rangle, \dots, \langle f_t \rangle$ で，それぞれ分割されているとき（演習問題 13-3 参照），$H_1(K_2)$ は

$$y := \sum_{1 \leq i \leq s} \langle e_i \rangle + \sum_{1 \leq j \leq t} \langle f_j \rangle$$

で生成されます．トーラスの場合と異なり，K_2 の 2 単体 $\tau_1, \tau_2, \dots$ すべてに「同じ向き」を入れると

$$\partial_2(\langle \tau_1 \rangle + \langle \tau_2 \rangle + \dots) = x \pm 2\Big(\sum_{1 \leq i \leq s} \langle e_i \rangle + \sum_{1 \leq j \leq t} \langle f_j \rangle\Big) = x \pm 2y$$

となります（ここでは単体の向きをいい加減にしか議論していないので符号が曖昧ですが，実際は符号は重要ではありません）．右辺はホモロジー群の元としては 0 ですから，$H_1(K_2)$ の元としては $i_{2*}([x]) = \pm 2[y]$ です．つまり，$H_1(K_1 \cap K_2) \cong \langle [x] \mid \rangle \cong \mathbb{Z}, H_1(K_2) \cong \langle [y] \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$ という同型は，次の図式が可換になるようなものです：

$$\begin{tikzcd} H_1(K_1 \cap K_2) \arrow[r, "i_{2*}"] & H_1(K_2) \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "\wr"', phantom, "\cong"] \arrow[r, "\times(\pm 2)"] & \mathbb{Z} \arrow[u, phantom, "\cong"] \end{tikzcd}$$

従って Mayer-Vietoris 完全系列

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_2(K_1) \oplus H_2(K_2) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & H_2(K) \arrow[r] & H_1(K_1 \cap K_2) \arrow[r, "(i_{1*}, i_{2*})"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \cdots \\ & 0 & & \mathbb{Z} \arrow[r, "\times(\pm 2)"] & 0 \oplus \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

において (i_{1*}, i_{2*}) の部分は単射なので，列の完全性から $H_2(K) = 0$ です．

次に

$$\begin{tikzcd} H_1(K_1 \cap K_2) \arrow[r, hook, "(i_{1*}, i_{2*})"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) \arrow[r, "j"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & H_1(K) \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\pm(\times 2)"] & \mathbb{Z} & & \end{tikzcd}$$

において，$|K_1|, |K_2|$ が弧状連結であることから $\delta = 0$ を示せるので（今までにも何度かやった議論です），j は全射，つまり $\mathrm{Im}\, j = H_1(K)$ です．列の完全性と準同型定理から $\mathrm{Im}\, j \cong H_1(K_2)/\mathrm{Ker}\, j = H_1(K_2)/\mathrm{Im}\, i_{2*}$ ですが，$i_{2*} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ とみたとき 2 倍写像であることから $H_1(K_2)/\mathrm{Im}\, i_{2*} \cong \mathbb{Z}/2$, 従って $H_1(K) \cong \mathbb{Z}/2$ です．

$H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ であることは，X が弧状連結であることによります．

提出された答案では，上記の y が $H_1(K_2)$ の生成元になることを明示しているものがあまり見られませんでした．ここを押さえないと，$H_1(K_2) \cong \mathbb{Z}$ のもとで $\mathrm{Im}\, i_{2*} \cong 2\mathbb{Z}$ である，という議論ができません．

またトーラスと同じ絵で単体分割を与えているものもたくさんありましたが，これでは $\sigma \cap \tau$ が σ, τ の面であるという単体複体の条件をみたしません．

実は X は実射影平面 (real projective plane) と呼ばれる 2 次元多様体です．$\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ などの記号で書かれます．上の計算で使った K_2 は実は Möbius の帯になっていて，このことにより X は向きづけ不可能な多様体です．逆に言うと，射影平面は Möbius の帯と円板 D^2 を，それぞれの境界（どちらも S^1 と同相）に沿って貼り合わせて得られることになります．想像できますか？
実は $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ は $\mathbb{R}^3$ の部分多様体としては実現できないことも知られています．このことについては，松本幸夫先生の「多様体の基礎」（東大出版）に簡潔な説明があります．「自己交差」を許すならば，$\mathbb{R}^3$ にはめ込むことはできます．「Boy 曲面」をキーワードとして調べてみてください．