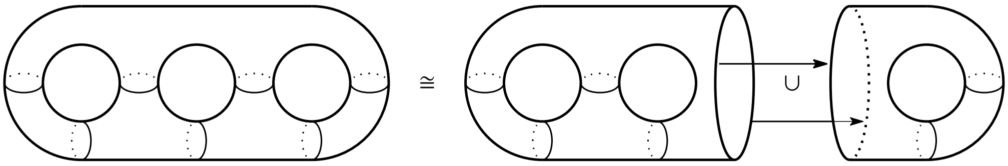
幾何学特別講義 **IV** 演習問題 **14**（**2018** 年 **1** 月 **18** 日）

担当：境 圭一

※例えば「トポロジー」（田村一郎，岩波書店）を参照してください

問題 1. 2 次元多様体 Σ_g $(g \geq 0)$ を次のように帰納的に定義する．まず $\Sigma_0 := S^2$ とし，Σ_g まで定義されたとき，Σ_g 上に取った開円板（と同相な部分空間）とトーラス T^2 上に取った開円板をそれぞれから取り除き，境界に沿って貼り合わせて得られる多様体を Σ_{g+1} と定義する．例えば $\Sigma_1 \cong T^2$ である．



Mayer-Vietoris 完全系列を用いて

$$H_0(\Sigma_g) \cong H_2(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2g}, \quad H_k(\Sigma_g) = 0 \quad (k \geq 3)$$

であることを示せ．

問題 2. K を S^2 の単体分割とし，K の 0 単体，1 単体，2 単体の数をそれぞれ l, m, n とする．

(1) K のチェイン複体

$$0 \longrightarrow C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0$$

のホモロジー群が $H_n(K) \cong \mathbb{Z}$ $(n = 0, 2)$, $H_n(K) = 0$ $(n \neq 0, 2)$ をみたすことと次元定理を使って，$l - m + n = 2$ を示せ．これを **Euler** の多面体定理という．

(2) n 面体は

- 各面が正多角形で，
- 各頂点に集まる辺の本数が一定である

とき正 $\boldsymbol{n}$ 面体であるという．正 n 面体が存在するような n は，$n = 4, 6, 8, 12, 20$ に限ることを示せ．

問題 3. $D^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1\}$ 上の同値関係を

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x = y \text{ または } x, y \in \partial D^3,\ x = -y$$

で定め，$P := D^3/\sim$ とおくとき

$$H_0(P) \cong H_3(P) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(P) \cong \mathbb{Z}/2, \quad H_k(P) = 0 \quad (k \neq 0, 1, 3)$$

であることを示せ．

事実．P は 3 次元実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ と微分同相である．

問題 4. $\mathbb{R}^N = \{(x_1, \ldots, x_N, 0)\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ とみなす．$v \in \mathbb{R}^N$ に対し，$\underline{v} := (v, 0), \overline{v} := (v, 1) \in \mathbb{R}^{N+1}$ とおく．$v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^N$ が一般の位置にあるとき，$0 \leq \forall i \leq n$ に対し $\underline{v_0}, \ldots, \underline{v_i}, \overline{v_i}, \ldots, \overline{v_n} \in \mathbb{R}^{N+1}$ も一般の位置にあることを示せ．

問題 5. n 単体 $\sigma^n := |v_0 \cdots v_n|$ について，柱体 $\sigma^n \times I := \{|\underline{v_0} \cdots \underline{v_i}\overline{v_i} \cdots \overline{v_n}| \text{の面} \mid 0 \leq i \leq n\}$ が単体複体であることを，次の手順で示せ．

(1) $n = 0$ のとき，$\sigma^0 \times I$ が単体複体の定義をみたすことを直接確かめよ．

(2) $n \geq 1$ のとき，$\sigma^{n-1} \times I$ が単体複体であると仮定する．$L := (\sigma^{n-1} \times I) \cup K(|\underline{v_0} \cdots \underline{v_n}|)$ は単体複体であることを示せ．また $\sigma^n \times I = \overline{v_n} * L$ であることを示せ．ただし単体 τ に対し，$K(\tau)$ は τ の面全体からなる単体複体を表す．（ヒント：定義により，$\sigma^n \times I$ のすべての単体は $\overline{v_n}$ を頂点に持つ単体の面である）

補足． この講義で述べたことは

- 単体複体のホモロジー群，そのホモトピー不変性
- $H_*(D^n), H_*(S^n), H_*(T^2)$ などの計算
- 次元の位相不変性など，簡単な応用

などでした．トポロジーの立場からは，ほかにも

- 特異ホモロジー論（単体分割可能でない位相空間についても定義できる）
- 胞体複体のホモロジー論（計算が簡単な場合が多い）
- 多様体のホモロジー論
- コホモロジー論，公理的（コ）ホモロジー論
- 一般コホモロジー論
- $\cdots$

など，やるべきこと，やりたいことはいくらでもあります．また，どんな数学をやっていても，ホモロジーに出会う可能性はあると思います．興味に応じて，然るべき参考文献にあたってみてください．
1/25 の講義では，上記の中からいくつかのトピックを選んで概説を試みたいと思います．演習問題は今回でおしまいにします．