2017 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 2

担当：境 圭一

問題 1. 以下に挙げる，ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ $(n = 2, 3)$ の部分集合 W_i について，それらは $\mathbf{R}^n$ の部分空間かどうか答えよ．

(1) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$

(2) $W_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$

(3) $W_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2\}$

(4) $W_4 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$

(5) $W_5 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

(6) $W_6 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - y + 3z = 0\}$

問題 2. 次の $\mathbf{R}^3$ の部分空間について，和空間 $W_1 + W_2$ は直和かどうか答えよ．

(1) $W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $\quad W_2 = \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\quad$ ただし $\quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$, $\quad W_2 = \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\quad$ ただし $\quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

問題 3. V を $\mathbf{K}$ ベクトル空間 ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$) とし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V$ を $\mathbf{0}$ でないベクトルとする．$\boldsymbol{v}_3 \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ のとき，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であることを示せ．

補足.

(i) 問題 1 で $\mathbf{R}^n$ の部分空間になっているのは W_1, W_4, W_6 です．証明としては，それぞれが和とスカラー倍で閉じているかどうかを確認するわけです．イメージとしては，$\mathbf{K}^n$ の部分空間とは，直線や平面のような「まっすぐな部分集合」で，原点を通るものです．$W_1, \ldots, W_6$ を図示してみて，そのことを確かめてみてください．「まっすぐな」とは「（定数項を含まない）1 次式で表せる」ということで，線形代数 (linear algebra) の名前の由来です．

(ii) 問題 2 は，$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ なら $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$, そうでなければ直和ではありません．$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ などは，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の線形結合で表されるベクトル全体の集合でした．例えば (1) なら

$$W_1 = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{R}^3 \mid a_1, a_2 \in \mathbf{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; a_1, a_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

です．$a_1 + a_2$ と a_2 は独立に変化できますから，W_1 は z 成分が 0 のベクトル全体の集合ということになります．すなわち，(1) の W_1 は $\mathbf{R}^3$ の中の xy 平面のことです．
また (1) の W_2 は「$\boldsymbol{v}_3$ の線形結合で表されるベクトル全体」です．単一のベクトルの線形結合というのはわかりにくいかもしれませんが，

$$W_2 = \{a\boldsymbol{v}_3 \in \mathbf{R}^3 \mid a \in \mathbf{R}\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; a \in \mathbf{R} \right\}$$

です．原点を通り $\boldsymbol{v}_3$ に平行な直線を表します．

(iii) 問題 3 のヒントを述べます．$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ は $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3$ $(a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{K})$ $\cdots$ (*) の形に表せるベクトル全体，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ は $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2$ $(a_1, a_2 \in \mathbf{K})$ $\cdots$ (**) の形に表せるベクトル全体のなすベクトル空間です．(**) は (*) で $a_3 = 0$ の場合ですから，(**) は (*) の一種です．これは

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle \supset \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$$

を意味します．もし逆の包含関係，つまり (*) は (**) の一種であることを証明できれば，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であることがわかります．そのときに $\boldsymbol{v}_3 \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ という条件を使います．整理して考えるのは難しいかもしれませんが，こういう問題を時間をかけて考えるのは良い訓練になります．