2017 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 3

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

問題 1. 次の $\mathbf{R}^3$ のベクトルの組は 1 次独立かどうか答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 0)$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\quad \boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 1)$

(3) $\boldsymbol{v}_1 = (2, 1, 0)$, $\quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 0, -1)$, $\quad \boldsymbol{v}_3 = (0, -1, -2)$

問題 2（教科書 p. 105, 命題 4.7 参照）．$\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, 0, 0), \boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 3, 0), \boldsymbol{v}_3 = (0, 0, 1, 4), \boldsymbol{v}_4 = (1, 0, -4, 8) \in \mathbf{R}^4$ とおく．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次従属であることを示せ．

(3) $\boldsymbol{v}_4$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せ．その表し方はただ一通りであることを示せ．

問題 3. $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1)$, $\quad \boldsymbol{u}_2 = (-1, 3)$, $\quad \boldsymbol{v}_1 = (0, 1)$, $\quad \boldsymbol{v}_2 = (2, -1) \in \mathbf{R}^2$ とおく．

(1) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ．また $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ も $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}_j = a_{1,j}\boldsymbol{u}_1 + a_{2,j}\boldsymbol{u}_2$ となる $a_{i,j} \in \mathbf{R}$ $(i, j = 1, 2)$ を求めよ．

(3) $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を縦ベクトルに書き換えたとき，2×2 行列の等式 $(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)A$ を確認せよ．

(4) A は正則であることを示せ．

(5) $\boldsymbol{u}_j = b_{1,j}\boldsymbol{v}_1 + b_{2,j}\boldsymbol{v}_2$ $(j = 1, 2)$ となる $b_{i,j} \in \mathbf{R}$ を求めよ．これらと A^{-1} の関係を考察せよ．

問題 4. V を $\mathbf{K}$ ベクトル空間とし，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ は 1 次独立であるとする．$i = 1, \ldots, k$ に対し，$\boldsymbol{v}_i \neq \mathbf{0}$ であることを示せ．（ヒント：対偶を考え，ある $\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ なら $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次従属であることを示すとよい）

補足.

(1) ベクトル空間 V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が与えられたとします（講義の定義 3.5 参照）．このとき，すべての $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{v}_i = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ $(c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{K})$ の形に表せ，補題 3.7 より，この表し方はただ一通りです．つまり，もし $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c'_i\boldsymbol{v}_i$ とも表せたとすると，各 $i = 1, \ldots, n$ に対し $c_i = c'_i$ です．よってこの $\boldsymbol{x}$ は，n 個のスカラーの組 $(c_1, \ldots, c_n)$ で完全に特定されることになります．この組 $(c_1, \ldots, c_n)$ が，**基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する $\boldsymbol{x}$ の成分**です．次の事実と比較してみてください：

  (i) $\mathbf{K}^n$ のすべてのベクトル $\boldsymbol{v} = (c_1, \ldots, c_n)$ は $\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} c_k\boldsymbol{e}_k$ の形に表せて（ただし $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は基本ベクトル），

  (ii) その表し方はただ一通りである．

ベクトル空間は $\mathbf{K}^n$ の性質を座標によらない形で抽象化したものでしたが，基底を一つ選べば，それに関する「座標」が一つ定まることになります．ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性は，各 $\boldsymbol{x} \in V$ の「座標」がただ一通りに定まることを保証する性質だということがわかります．

(2) 1 次独立性を理解するには，逆に 1 次従属性を理解するのも一つの手です．例えば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{R}^n$ が 1 次従属であるとすると，$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ となる $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ で，どちらか一方が 0 でないものが取れます．もし $a_1 \neq 0$ とすれば $\boldsymbol{v}_1 = -\dfrac{a_2}{a_1}\boldsymbol{v}_2$, また $a_2 \neq 0$ とすれば $\boldsymbol{v}_2 = -\dfrac{a_1}{a_2}\boldsymbol{v}_1$ です．いずれにしても $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は平行，あるいは（始点を原点に統一すれば）同一直線に含まれることになります．言いかえると次のことがわかります：

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbf{R}^n \text{ が 1 次独立である} \iff \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \text{ は平行でない}$$

同じように考えると，**$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \mathbf{R}^n$ が 1 次独立なら，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は同一平面に含まれない**ことがわかります．一般に，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbf{R}^n$ が 1 次独立なら，これらは同一の「$k-1$ 次元空間」に含まれません（想像しにくいのですが）．