2017 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 4

担当：境 圭一

※提出の必要はありません．レポート問題は別途出題しています．

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．

問題 1. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ とする．基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbf{K}^n$ は $\mathbf{K}^n$ の基底であることを示せ．（よって $\dim \mathbf{K}^n = n$ がわかる）

問題 2. 次のベクトルの組は $\mathbf{R}^4$ の基底か？

(1) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (0,1,1,0), \quad \boldsymbol{v}_3 = (0,0,1,1), \quad \boldsymbol{v}_4 = (1,0,0,1)$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (0,1,1,0), \quad \boldsymbol{v}_3 = (0,0,1,1), \quad \boldsymbol{v}_4 = (1,0,-1,0)$

(3) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1,1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,-2,4,8), \quad \boldsymbol{v}_3 = (1,3,9,27), \quad \boldsymbol{v}_4 = (1,-4,16,64)$

問題 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $\operatorname{rank} A$ を求めよ．

(2) $V := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 \mid A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$ とおく．V は $\mathbf{R}$ ベクトル空間であることを示せ．（教科書 p. 99, 例 4.1.5 (4) 参照）

(3) $\dim V$ を求めよ．

問題 4. $\boldsymbol{v}_1 = (2,1,-1,3), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,4,0,1), \quad \boldsymbol{v}_3 = (0,3,2,0), \quad \boldsymbol{v}_4 = (-1,0,-1,-2) \in \mathbf{R}^4$ とし，$W_1 := \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $W_2 := \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle \subset \mathbf{R}^4$ とおく．

(1) $\dim W_1, \dim W_2$ を求めよ．

(2) $\dim(W_1 \cap W_2)$ を求めよ．

(3) $\dim(W_1 + W_2)$ を求めよ．

補足.

(1) 講義の命題 4.6 の証明をよく見ると，V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立で，n 個より多いベクトルの組が 1 次独立にならないとき（このとき $\dim V = n$ です），$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底になることがわかります．$V = \mathbf{R}^4$ の場合，$\dim \mathbf{R}^4 = 4$ であることはわかっていますから，1 次独立なベクトルの最大個数は 4 です．よって問題 2. の各組は，1 次独立であれば基底であり，1 次独立でなければ基底ではないことになります．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_4$ を縦ベクトルに書き直して $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 \end{pmatrix}$ という 4×4 行列を考えると，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立 $\iff \operatorname{rank} A = 4 \iff \det A \neq 0$ です．

(2) 講義の補題 4.1 を証明するときに使った

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} C \quad \cdots \quad (*)$$

（教科書 p. 108 も参照）という書き方は誤解を招くかもしれません．$C = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ のとき，$(*)$ の右辺は

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_{k1}\boldsymbol{b}_k & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_{k2}\boldsymbol{b}_k & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_{kn}\boldsymbol{b}_k \end{pmatrix} \quad \cdots \quad (**)$$

を略記したものです．つまり $(*)$ は，n 個の等式 $\boldsymbol{a}_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_{kj}\boldsymbol{b}_k$ $(j = 1, \ldots, n)$ をまとめて略記したものです．気持ちとしては，各 $\boldsymbol{b}_k$ をあたかも単独のスカラーのように考えて，$(*)$ の右辺を「$1 \times m$ 行列」と $m \times n$ 行列の積のようにみなして計算すれば $(**)$ になる，ということです．

考えているベクトル空間が $V = \mathbf{K}^n$ で，各 $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j$ が縦ベクトルで書かれていれば，等式 $(*)$ は行列の間の等式として意味があります．つまり $(*)$ の右辺の行列の積を計算すれば，行列 $(**)$ に一致します．演習問題 3 の問題 3 も参照してください．