

※スペース節約のため、ベクトルを横に書きます。縦で書き直した方が計算しやすいと思います。

問題 1.  $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 2, -3)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (4, 1, -1, 2) \in \mathbf{R}^4$  とする。

- (1)  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  は 1 次独立であることを示せ。  $W := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$  とおくと、  $\dim W = 2$  であることを示せ。(問題 2. (1) も参照)
- (2)  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  の両方と直交するベクトル  $\mathbf{u}_3 \in \mathbf{R}^4$  を 1 つ求めよ。
- (3)  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  のいずれとも直交するベクトル  $\mathbf{u}_4 \in \mathbf{R}^4$  を 1 つ求めよ。
- (4)  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$  は  $\mathbf{R}^4$  の基底であることを示せ。

問題 2.

- (1) 一般に、  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  が 1 次独立であるとき、  $W := \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$  とおくと、  $\dim W = k$  であることを示せ。
- (2)  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, -2)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, -3)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (1, 1, 0, -3)$ ,  $\mathbf{v}_5 = (-2, 0, 1, -1) \in \mathbf{R}^4$  とおく。教科書 112 ページの間 4.2.7 の  $W_1, W_2$  について、  $W_1 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ ,  $W_2 = \langle \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 \rangle$  であることを示せ。
- (3)  $\dim W_1 = 3$ ,  $\dim W_2 = 2$  であることを示せ。
- (4)  $W_2 \subset W_1$  であることを示せ。これにより  $W_1 \cap W_2 = W_2$  であることを示せ。
- (5)  $\dim(W_1 + W_2) = 3$  であることを示せ。

問題 3.  $\mathbf{R}^3$  の部分ベクトル空間

$$W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x + 3y - 2z = 0 \right\}, \quad W_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{array}{l} x + y = 0, \\ 2x - z = 0 \end{array} \right\}$$

を考える。前問を参考に、  $\dim W_1, \dim W_2, \dim(W_1 \cap W_2), \dim(W_1 + W_2)$  を求めよ。  $W_1 + W_2$  は直和か?

補足.

- (i) 講義の定理 4.8 から、問題 1 のような  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{R}^4$  が与えられたとき、  $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in \mathbf{R}^4$  をうまく選んで付け足すことで  $\mathbf{R}^4$  の基底  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_4$  を作るすることができます。しかし定理 4.8 は  $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$  の見つけ方まで教えてくれるわけではありません。問題 1 は、  $\mathbf{R}^4$  のユークリッド内積を利用して、その方法の 1 つを具体的に与えたものです。ユークリッド内積は  $\mathbf{R}^n$  に座標が (つまり、標準基底  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  が) あることを使って定義されるもので、一般のベクトル空間  $V$  にはそのようなものはないので、問題 1 の方法は (ひとまずは)  $V = \mathbf{R}^n$  のときしか使えない方法です。一般の  $V$  上の内積については、次回以降の講義で論じます。
- (ii) 問題 2. (1) は、  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  が  $W$  の基底であることを示すとよいでしょう。(2) の  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$  を上のように与えた理由は、  $W_1, W_2$  の条件から、  $W_1, W_2$  のベクトルがそれぞれ

$$W_1 = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbf{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid y, z \in \mathbf{R} \right\}$$

の形に表せることによります。つまり条件式を使って文字を減らしたわけです。その減らし方は人それぞれなので、他のベクトルを使って  $W_1, W_2$  を表示することもできます。例えば  $\mathbf{u}_1 = (-2, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-3, 0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 0, 1)$  に対し  $W_1 = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$  です。(4) を示すには、  $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{v}_5 = -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$  であることを使うとよいでしょう。この問題で  $W_2 \subset W_1$  となったのは偶然で、一般的には  $W_2 \not\subset W_1$ ,  $W_1 \not\subset W_2$  です。その場合は  $W_1 \cap W_2$  は  $W_1, W_2$  の両方の条件をみたす  $(x, y, z, w)$  全体の集合です。その条件を使って文字を減らすことで、上と同様に  $W_1 \cap W_2$  を求められます。(5) は講義でやった命題 4.9 を使います。この問題の場合は  $\dim(W_1 + W_2) < \dim \mathbf{R}^4$  なので、  $W_1 + W_2 \subsetneq \mathbf{R}^4$  です。また  $\dim(W_1 + W_2) \neq \dim W_1 + \dim W_2$  なので、講義でやった系 4.10 により、  $W_1 + W_2$  は直和でないこともわかります。