

※スペース節約のため、ベクトルを横に書きます。縦で書き直した方が計算しやすいと思います。

問題 1. 次のベクトルの組 $\{u_1, u_2, \dots\}, \{v_1, v_2, \dots\}$ は V の基底であることを示せ。また $\{v_1, v_2, \dots\}$ から $\{u_1, u_2, \dots\}$ への基底の変換行列 P を求めよ。

$$(1) V = \mathbf{R}^4, \quad u_1 = (1, 0, 2, -3), \quad u_2 = (4, 1, -1, 2), \quad u_3 = (2, 0, 2, 1), \quad u_4 = (1, 2, 1, 0),$$

$$v_1 = (0, 1, 2, 0), \quad v_2 = (0, 0, -1, 3), \quad v_3 = (5, 0, 3, 1), \quad v_4 = (1, 2, -1, -3)$$

$$(2) V = \mathbf{R}^n, \quad u_k = k e_k, \quad v_k = e_{n-k} \quad (1 \leq k \leq n). \text{ ただし } e_1, e_2, \dots, e_n \text{ は } \mathbf{R}^n \text{ の標準基底.}$$

問題 2. 問題 1. (1), (2) それぞれについて、各 u_i, v_j を縦ベクトルで書いて $A = (u_1 \ \dots \ u_n), B = (v_1 \ \dots \ v_n)$ とおくと、行列の等式 $A = BP$ を確認せよ。

問題 3. $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し

$$(u, v)' := \sum_{k=1}^n k u_k v_k \in \mathbf{R}$$

と定義する。また e_1, \dots, e_n を \mathbf{R}^n の標準基底とする。

(1) 上の $(\cdot, \cdot)'$ は内積であることを示せ。

(2) $1 \leq i, j \leq n$ に対し、 $(e_i, e_j)'$ を計算せよ。特に、 e_k の長さ $|e_k|$ を求めよ。ただし内積空間のベクトル v の長さとは $|v| := \sqrt{(u, u)'}$ のことである。

問題 4. 実数を係数とする x の多項式全体のなすベクトル空間を $\mathbf{R}[x]$ と書く (演習問題 1 の問題 3 参照)。

(1) $f(x), g(x) \in \mathbf{R}[x]$ に対し

$$(f(x), g(x)) := \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

とおく。 (\cdot, \cdot) は $\mathbf{R}[x]$ 上の内積であることを示せ。

(2) $f_i(x) := x^i \ (i \geq 0)$ とおく。 $(f_i(x), f_j(x))$ を計算せよ。特に、 $f_i(x)$ の長さ $|f_i(x)|$ を求めよ。

補足。

(i) 基底 u_1, \dots, u_n から v_1, \dots, v_n への変換行列 P の定義式 $(v_1 \ \dots \ v_n) = (u_1 \ \dots \ u_n)P \cdots (*)$ は、演習問題 4 の補足にも書いたように、あくまで形式的なものです。しかし $V = \mathbf{K}^n$ の場合については、 $(*)$ は行列の等式としてきちんとした意味のあるもので、問題 2 はその実例です。逆に言うと、 $V = \mathbf{K}^n$ の場合の行列の等式を一般のベクトル空間の場合にも拡張したのが $(*)$ です。

(ii) ベクトル空間は、 \mathbf{K}^n の性質のうち、和とスカラー倍だけを取り出し抽象化したものでした。 \mathbf{R}^n 上の Euclid 内積は \mathbf{R}^n が標準的な座標を持つことを使って定義されるもので、一般のベクトル空間上で定まるものではありません。そこで、Euclid 内積の定義式でなく、それが持つ性質だけに注目して抽象化したのが一般の内積です。その結果、問題 4 のような (\mathbf{R}^n でない) ベクトル空間にもいろいろな内積を定義でき、次回の講義でやるように、「ベクトル」の「長さ」や「角度」を定められます。これにより、例えば $\mathbf{R}[x]$ のような (\mathbf{R}^n でない) ベクトル空間内で幾何学を行えるようになります。

また、もともとの \mathbf{R}^n にも、Euclid 内積とは異なる様々な内積が考えられます。例えば問題 3 の内積を持つ \mathbf{R}^n は、(2) を計算してみるとわかりますが、方向によって長さが偏っているような、Euclid 空間に比べて「歪みのある」ベクトル空間になっています。

(iii) 内積空間のベクトルの長さは、教科書では $\|v\|$ で表していますが、この講義では $|v|$ にしています。後者を採用している教科書もあります。この講義では、縦線が少ないほうが楽だから、というだけの理由で後者に行っています。好きなほうで書いてもらって差し支えありません。