# 2017 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 7

担当：境 圭一

※スペース節約のため，ベクトルを横に書きます．縦で書き直した方が計算しやすいと思います．
以下，$\mathbf{R}^n$ 上には Euclid 内積を考えるものとする．

**問題 1**. 次のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots$ は 1 次独立であることを示せ．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots$ に対し Gram-Schmidt の直交化法を（講義でやった順序で）適用して得られる正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots$ を求めよ．
(1) $\boldsymbol{v}_1 = (1,2), \boldsymbol{v}_2 = (1,-1) \in \mathbf{R}^2$
(2) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0), \boldsymbol{v}_2 = (2,-1,1) \in \mathbf{R}^3$
(3) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,2), \boldsymbol{v}_2 = (1,3,4), \boldsymbol{v}_3 = (0,2,-1) \in \mathbf{R}^3$
(4) $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,2), \boldsymbol{v}_2 = (2,-1,1,3), \boldsymbol{v}_3 = (1,3,1,0), \boldsymbol{v}_4 = (-4,0,2,1) \in \mathbf{R}^4$

**問題 2**（教科書の 123〜125 ページ参照）．$V$ を内積空間とする．部分ベクトル空間 $W \subset V$ に対し

$$W^{\perp} := \{\boldsymbol{u} \in V \mid \text{各 } \boldsymbol{w} \in W \text{ に対し } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = 0\}$$

とおき，$W$ の**直交補空間**とよぶ．
(1) $W^{\perp}$ は $V$ の部分ベクトル空間であることを示せ．
(2) $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ であることを示せ．
(3) $V = W \oplus W^{\perp}$ であることを示せ．
(4) $\dim V = n, \dim W = k$ とおくとき，$\dim W^{\perp}$ を求めよ．

**問題 3**. 講義の命題 6.5 で証明しなかった以下のことを証明せよ（内積の性質を用いよ）：
$(V, (\ ,\ ))$ を $\mathbf{R}$ 内積空間とし，各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とするとき
(1) $|\boldsymbol{x}| \geq 0$.　また $|\boldsymbol{x}| = 0 \iff \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
(2) $\boldsymbol{x} \in V$ と $r \in \mathbf{R}$ に対し $|r\boldsymbol{x}| = |r||\boldsymbol{x}|$.　※右辺は $r \in \mathbf{R}$ の絶対値と $\boldsymbol{x} \in V$ の長さの積
(3) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$.　（ヒント：Cauchy-Schwarz の不等式を使う）
また，(3) で等号が成り立つとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を求めよ．

**補足**．Gram-Schmidt の直交化法は，もとのベクトルの順序により異なる正規直交系を与えます．例えば $\boldsymbol{v}_1 = (1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,0) \in \mathbf{R}^2$ からは $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ が得られますが，$\boldsymbol{v}'_1 = (-1,0), \boldsymbol{v}'_2 = (1,1)$ からは $(-1,0), (0,1)$ が得られます．「$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots$ に対して Gram-Schmidt の正規直交化法を用いて…」と問われたら，講義でやったのと同じ順序で，$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}'_1/|\boldsymbol{u}'_1|$（ただし $\boldsymbol{u}'_1 = \boldsymbol{v}_1$ とする），$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}'_2/|\boldsymbol{u}'_2|$（ただし $\boldsymbol{u}'_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$ とする），$\dots$ を答えてください．
一般的に，Gram-Schmidt の直交化法を具体的に実行すると，大変な計算になることが多いようです．問題 1 をやるときは，ゆっくり注意深くやることが大切です．一つのコツとして，例えば問題 1 (1) では $\boldsymbol{u}'_2 = \dfrac{3}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ となると思いますが，$\boldsymbol{u}_2 := \dfrac{\boldsymbol{u}'_2}{|\boldsymbol{u}'_2|}$ を計算するときに，$\boldsymbol{u}'_2$ そのものでなく $\boldsymbol{w} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ について $\dfrac{\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{w}|}$ を計算しても，同じ $\boldsymbol{u}_2$ が得られます．後者の方が簡単でしょう．こうしてよい理由は，やってみるとすぐにわかると思います．係数 3/5 が正であることが重要です．このようにして答が出たら，それが正規直交系か（つまり，$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$ となっているか）を必ず確認するようにしてください．ある程度ミスの可能性を減らせます．
Gram-Schmidt の直交化法が本当に正規直交系を与えることの証明は割愛しましたが，この証明には今まで学んだことを満遍なく使うので，よい復習になるように思います．教科書の説明は言葉足らずなように思うので，余力があれば，ぜひ自分で考えてみてください．