2017 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 10

担当：境 圭一

問題． 次の線形写像 f_i について，その核 (kernel) と像 (image) の基底を一組ずつ求めよ．また f_i について次元定理が成り立っていることを確認せよ．

(1) $f_1\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1,\ f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := x - 3y$　(2) $f_2\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$　(3) $f_3\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3,\ f_3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \\ 3x+5y \end{pmatrix}$

(4) $f_4\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2,\ f_4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+z \\ y+3z \end{pmatrix}$　(5) $f_5\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3,\ f_5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+2y+z \\ x-y+3z \\ 3x+3y+5z \end{pmatrix}$

補足． 線形写像 $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ について，$\mathrm{Ker}\, f$ を求めるのは比較的簡単で，$\mathrm{Im}\, f$ を求めるのは多少面倒です．例えば

$$f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+2y-2z \\ 2x-y+z \\ 3x+y-z \end{pmatrix}$$

という線形写像を例にとって考えてみます（線形であることを確認してみてください）．まず

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x+2y-2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y-z=0 \end{matrix} \right\}$$

は，連立 1 次方程式の解全体のなす部分ベクトル空間です．この方程式を解くと $x = 0, y = z$ となることを確かめてください．よって

$$\mathrm{Ker}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; y \in \mathbf{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

であることがわかります．$\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$ です．
次に $\mathrm{Im}\, f = \{\boldsymbol{w} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^3$ がある $\}$ を考えてみます．

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-2z \\ 2x-y+z \\ 3x+y-z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y-z)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書き直すと，左辺は $\mathrm{Im}\, f$ の一般的なベクトルで，それは右辺の 2 つの 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{w}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 次結合となることがわかります．よって

$$\mathrm{Im}\, f = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle, \quad \dim \mathrm{Im}\, f = 2$$

です．$\mathrm{Ker}\, f$ の計算は連立方程式を解くだけなのに対して，$\mathrm{Im}\, f$ の計算は式変形に多少の工夫が必要で，やりにくく感じるのではないかと思います．
しかし，$\dim \mathrm{Im}\, f$ を求めるだけなら次元定理が便利で，上の例の場合は $\dim \mathbf{R}^3 = 3, \dim \mathrm{Ker}\, f = 1$ は比較的容易にわかりますから

$$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}\, f = 3 - 1 = 2$$

であることは $\mathrm{Im}\, f$ の基底を求めなくてもわかります．あらかじめ $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$ を知っておけば，$\mathrm{Im}\, f$ の基底は 2 個のベクトルからなるはずだとわかるわけですから，多少は計算の見通しが良くなるかもしれません．