2017 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）演習問題 11

担当：境 圭一

問題 1. U, V, W をベクトル空間とし，$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ を線形写像とする．このとき，合成 $g \circ f \colon U \to W$ も線形であることを示せ．

問題 2. 次の線形写像 f, g, h について，与えられた基底に関する表現行列を求めよ．f, g, h は単射か？また全射か？

(1) $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,　$f(x, y) = (x - 3y,\ x + 3y)$,　$\mathbf{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1), \boldsymbol{u}_2 = (-2, 1)$

(2) $g \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,　$g(x, y, z) := (2x + 3y - z,\ x + y,\ y - z)$,　$\mathbf{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{u}_1 = (0, 1, 1), \boldsymbol{u}_2 = (1, 0, 1), \boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 0)$

(3) $h \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,　$h(x, y) := (x + 2y,\ 2x + 3y,\ -x)$,　$\mathbf{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1), \boldsymbol{u}_2 = (-1, 1)$,　$\mathbf{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, -1, 1), \boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 0)$

問題 3.

(1) ベクトル空間 V に対し，$\mathrm{id} \colon V \to V$ を $\mathrm{id}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}$ で定め，V の**恒等写像**とよぶ．id は線形写像であることを示せ．

(2)（教科書 p. 143, 命題 5.7 (2) 参照）$\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^n, \{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ がともに V の基底であるとする．$\{\boldsymbol{u}_i\}_i$ を id の定義域 V の基底，$\{\boldsymbol{v}_i\}_i$ を値域 V の基底とみなすと（教科書の記号を使えば，$\mathrm{id} \colon V\{\boldsymbol{u}_i\}_i \to V\{\boldsymbol{v}_i\}_i$ とみなすと），これらに関する id の表現行列は，$\{\boldsymbol{u}_i\}_i$ から $\{\boldsymbol{v}_i\}_i$ への基底の変換行列であることを示せ．

補足．ベクトル空間 V, W に基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ が与えられている状況では，V, W はそれぞれ $h_V(\boldsymbol{v}_i) := \boldsymbol{e}_i$, $h_W(\boldsymbol{w}_j) := \boldsymbol{e}_j$ で定義される同型写像 $h_V \colon V \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^n$ と $h_W \colon W \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^m$ により $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ と同一視されます．教科書の 141 ページあたりで「基底を固定して考えるときに $V\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ のように表す」という言い方をしているところです．この同一視のもと，線形写像 $f \colon V \to W$ は線形写像 $g \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ に対応します：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_V"', "\cong"] & W \arrow[d, "h_W"', "\cong"] \\ \mathbf{R}^n \arrow[r, "g"] & \mathbf{R}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{v} \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, "h_V"'] & f(\boldsymbol{v}) \arrow[d, "h_W"] \\ h_V(\boldsymbol{v}) \arrow[r, mapsto, "g"] & h_W(f(\boldsymbol{v})) \end{tikzcd}$$

上の行では $\boldsymbol{v}$ と $f(\boldsymbol{v})$ が f で対応しています．これらを同型写像 h_V, h_W で下の行にうつしたベクトル $h_V(\boldsymbol{v})$ と $h_W(f(\boldsymbol{v}))$ は g によって対応している，つまり $g(h_V(\boldsymbol{v})) = h_W(f(\boldsymbol{v}))$ が成り立っているわけです．

このような g は，

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix} A \tag{$*$}$$

をみたす $m \times n$ 行列 A を使って $g(\boldsymbol{u}) := A\boldsymbol{u}$ と表されます．この行列 A を，基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ に関する f の表現行列とよびます．

同じ線形写像 $f \colon V \to W$ でも，表現行列は基底の取り方によって変化します．例えば $\dim V = \dim W$ の場合，基底の取り方によっては，表現行列が**対角行列**

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

になることもあります．λ はギリシャ文字でラムダと発音します．このような基底 $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j$ に関しては，$(*)$ より

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \lambda_m \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix}, \quad \text{つまり} \quad f(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i \boldsymbol{w}_i$$

となります．基底を「座標軸」だと考えると，f はこの座標軸に関しては座標軸方向のスカラー倍になっている，ということです．このような基底はいつでも存在するわけではありませんが，どのような場合に存在するのか，それはどのようにして見つけることができるのか，というのが残りの講義のテーマです．

問題 2 の (1), (2) は $V = W$ の場合で，定義域と値域で共通の基底を取る，という意味です．例えば (1) では $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2)$ ということです．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_linear/17_linear.html