

問題 1. $i = \sqrt{-1}$ とする. 次の行列 A_k の固有値と, それらに属する固有空間の基底を求めよ. また固有値の積を計算し, $\det A$ と比較せよ.

$$(1) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$$

$$(6) A_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3i & -1+2i & -1+i \\ i & 1+2i & 1-i \\ -i & 1-2i & 1+i \end{pmatrix} \quad (7) A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{※一部は「線形代数演習」(斎藤正彦著,} \\ \text{東京大学出版会) から借用しました} \end{array}$$

問題 2. A を $n \times n$ 行列とする.

- (1) ϕ_A は t の n 次多項式で, t^n の係数は 1 であることを示せ. (ヒント: 行列式の定義 (教科書 62 ページ) を使う. $tE_n - A = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, つまり $i \neq j$ のとき $b_{ij} = -a_{ij}$, $i = j$ のとき $b_{ii} = t - a_{ii}$ とおくと, $b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$ には t は高々 n 回しか現れず, t^n が現れるような $\sigma \in S_n$ は恒等置換しかないことを示せばよい)
- (2) $\phi_A(t)$ の t^{n-1} の係数は $-\text{tr} A$ であることを示せ. ただし, 一般に正方行列 $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ に対し, $\text{tr} C = \sum_{i=1}^n c_{ii}$ である. (ヒント: (1) と同様. $b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$ に t^{n-1} が現れるような $\sigma \in S_n$ も恒等置換しかない)
- (3) $\phi_A(t)$ の定数項は $(-1)^n \det A$ であることを示せ. (ヒント: 多項式の定数項は $\phi_A(0)$ である)
- (4) A の固有値を重複も込めて $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とするとき, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \text{tr} A$, $\lambda_1 \cdots \lambda_n = (-1)^n \det A$ であることを示せ. (ヒント: $\phi_A(t)$ に対する解と係数の関係を使う)

問題 3. 対角成分が順に $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ であるような $n \times n$ 対角行列 (diagonal matrix) を $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ と表す.

- (1) $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ のとき, 自然数 k に対し, $A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ であることを示せ.
- (2) 一般に, $n \times n$ 行列 B の指数関数 $\exp(B) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$ は収束することが知られている. $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ のとき, $\exp(A) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ であることを示せ.
- (3) 対角行列とは限らない $n \times n$ 行列 B に対し, ある $n \times n$ 正則行列 P が存在して $P^{-1}BP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ となるとするとき, $\exp(B) = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1}$ を示せ.

補足.

- (i) λ はラムダ, ϕ はファイまたはフィーと発音します. これらはギリシャ文字です. 空集合 (要素を含まない集合) を表す記号 \emptyset はゼロに斜線を重ねたもので, ϕ とは違いますから注意してください.
- (ii) 講義で述べた通り, $\lambda \in \mathbf{C}$ が $n \times n$ 行列 A の固有値であるとは, λ が A の固有方程式 $\phi_A(t) = |\lambda E_n - A| = 0$ の解であることと同値です. ϕ_A は n 次多項式なので, 複素数の範囲では $\phi_A(t) = 0$ の解, つまり A の固有値は (重複も込めて) n 個あります. スカラーを複素数にしたのはこのことが理由です.
- (iii) 今後の目標は, 講義で述べた通り正方行列 A の対角化, つまり $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を見つけることです. 対角化の恩恵はいろいろあり, 例えば問題 3 がその 1 つです. $\exp(B)$ の定義は複雑だが, いったん対角化しておくとも容易に計算できる, という内容です.
- (iv) 対角化はいつでもできるわけではありませんが, 対角化可能な場合の例として, A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に重複がないときを考えます. λ_i に属する固有ベクトル $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ を取り $P = (\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{x}_n)$ とおくと,

$$AP = (A\mathbf{x}_1 \ \cdots \ A\mathbf{x}_n) = (\lambda_1\mathbf{x}_1 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{x}_n) = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

となることを確かめてみてください (記号は問題 3 を参照). 実は P は正則で, $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ です. つまり A は対角化されます. 以上のことはこのあとの講義でやります.