2017 年度 線形代数学 II（火曜 2 限，生物学コース・物質循環学コース）

担当：境 圭一

1. 講義の内容，成績など．

(1) 必修科目です．ベクトル空間・線形写像などの初歩的な部分を抽象的に扱います．

(2) 教科書は「基礎理学 線形代数学」（数学教科書編集委員会編，学術図書出版社）です．生協で購入できます．第 4 章〜第 7 章の内容を扱います．

(3) 成績は，中間試験と期末試験，ならびにレポートの状況により判定します．中間・期末試験とも 50 点満点，計 100 点満点です．このほかに数回のレポートを課します（20 点程度相当の予定）．これらの合計が 60〜69 点なら「可」，70〜79 点なら「良」，などとします．単位取得のためには，中間試験と期末試験の両方を受験することを必須とします．追試の類は行いません．

(4) 中間試験は 11/21（火）2 限，期末試験は 1/30（火）2 限の予定です．変更がある場合は追って掲示します．

(5) 出席状況は，成績評価には用いません．

(6) この講義に関する連絡事項は以下の URL に掲載します．
`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_linear/17_linear.html`

(7) この講義に演習はついていませんが，演習問題などの情報は上記 URL に随時掲載します．

(8) 講義中であっても遠慮なく質問してください．講義外でも随時受け付けます．研究室（理学部 A 棟 403）にお越しください．あらかじめ `ksakai@math.shinshu-u.ac.jp` 宛に連絡をもらえれば確実です．

2. よく使う記号など．ここに書いたもの以外にもあります．わからないものがあれば，その都度質問してください．

(1)「定義」「命題」など画数の多い漢字は，英語（の省略形）で書くことが多々あります．教員によって異なる省略形を使うこともあるので厄介です．
- 「定義」: Definition, Def など．「このように約束する」という内容です．
- 「定理」: Theorem, Thm, Th など．（明らかでない）ある事実が成立する，と主張する内容です．
- 「命題」: Proposition, Prop など．定理と同類ですが，定理よりは少し軽い感じです．
- 「補題」: Lemma, Lem など．定理や命題と同類ですが，より重要な定理や命題などに向けた補助的な内容です．中には，結果的に定理より重要になるような，汎用性が極めて高いものもあります．
- 「系」: Corollary, Cor など．前の定理や命題を使えばすぐに証明できる，という内容です．
- 「証明」: Proof, Pf など．定理などが成り立つ理由を厳密に示します．
- 「例」: Example, Ex など．抽象的な理論に対する具体例です．
- 「注意」: Remark, Rem, Rmk など．補足したり，間違えやすい点について注意を促す内容です．

(2) A $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ B と書いたら，「A とは，B であることと定義する」という意味です．A, B は命題（文章）です．例えば

$$n \times n \text{ 行列 } X \text{ が正則 } \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} |X| \neq 0$$

は，「$n \times n$ 行列 X が正則であるとは，X の行列式 $|X|$ が 0 でないことと定義する」という意味です．

(3) $P := Q$ と書いたら，「Q のことを P と書く」という意味です．記号を定義するときに使います．P は新たに導入する記号で，Q には既知の数式が書かれます．例えば

$$f(x) := 1 + 2x \quad \text{や} \quad \mathbf{R} := \{\text{ 実数 }\}, \quad \mathbf{C} := \{\text{ 複素数 }\}$$

は，それぞれ「$f(x) = 1 + 2x$ とおく」「実数全体の集合を $\mathbf{R}$ と書く」「複素数全体の集合を $\mathbf{C}$ と書く」という意味です．

(4) A $\Longleftrightarrow$ B と書いたら「A と B は同値である」という意味です．“$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$” とは違います．次のように使います：

$$x \in \mathbf{R} \text{ について次が成り立つ：} \quad x = 0 \iff x^2 = 0$$

(5) $x \in X$ は「x は集合 X に含まれる」「x は X の元（要素）である」という意味です．例えば $x \in \mathbf{R}$ は「x は実数全体の集合の元である」，要するに「x は実数である」ということです．

(6) ベクトル空間の定義に出てくる**スカラー**としては，主に実数や複素数を考えます．実数を考える場合は「$\mathbf{R}$ 上のベクトル空間」，複素数の場合は「$\mathbf{C}$ 上のベクトル空間」が定義されるわけです．どちらでも同じ定理や命題が成り立つ場合も多く，その場合は $\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ のことをまとめて $\mathbf{K}$ で表します．

(7) スカラー（実数，複素数）はふつうの文字 $a, b, k, l, \ldots$ などで，（縦）ベクトルは太い文字 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$ などで書きます．太字の板書方法は人それぞれなので厄介です．読めないときは質問してください．混同しないのであれば太字にしなくてもよいのですが，たいてい混同するので，がんばって太字を書くようにしたほうが無難です．

(8) n 項ベクトルの縦横は，行列との積を考える際には特に重要です．それ以外ではどちらでもいいのですが，和や内積の計算には縦が便利です（やってみるとわかる）．この講義では太字のベクトル $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n$ などは原則として縦ベクトルとします．特に横ベクトルを使いたいときは，行列の転置（教科書の 22 ページ）の記号を使って ${}^t\boldsymbol{u}$ と書きます．縦ベクトルを $n \times 1$ 行列，横ベクトルを $1 \times n$ 行列とみなしているわけです．

3. 線形代数学を学ぶ動機． 線形代数は，微積分とともに数学全ての基礎をなします．数学以外でも，自然科学に関わるあらゆる分野を学ぶ上で大切なものです．

一つの例として，**微分方程式**を考えてみます．これは微分を含む関数の等式で，最も典型的なものは

$$f'(x) = af(x) \quad (a \text{ は定数で } a \neq 0) \tag{a}$$

といったものです．例えば，水や風の流れの様子などを記述しようとするときに使われるものです．

方程式 (a) をみたす関数 f は，(a) の両辺を $f(x)$ で割ると $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = a$ となることから（本当は $f(x) = 0$ となる場合がないか注意する必要がありますが），両辺を積分して $\log|f(x)| = ax + b$ (b は定数), よって $f(x) = ce^{ax}$ と求められます ($c := \pm e^b$ とおいた).

これくらいなら比較的容易ですが，より複雑な形になったり，関数がたくさん入り乱れたりすると厄介です．例えば

$$f'(x) = 7f(x) + 12g(x), \quad g'(x) = -4f(x) - 7g(x) \tag{b}$$

を同時にみたす関数 $f(x), g(x)$ を求めよ，という問題は (a) のように簡単ではなさそうに見えます．しかし線形代数学の知識があると，(b) は (a) と同じ問題だということが，次のようにしてわかります．(b) は

$$\begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \tag{c}$$

のように行列とベクトルの積の形で表せます．線形代数学の知識があると

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{とおけば} \quad P^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{d}$$

という P を比較的容易に見つけることができます．(d) を踏まえて $\begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ とおくと，(c) より

$$\begin{pmatrix} F'(x) \\ G'(x) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} P \left(P^{-1} \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix} \tag{e}$$

となります．(e) は $F'(x) = F(x)$ かつ $G'(x) = -G(x)$ を意味しますが，これらは (a) と全く同様で，$F(x) = ke^x$, $G(x) = le^{-x}$ (k, l は定数) がわかります．あとは $\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} F(x) \\ G(x) \end{pmatrix}$ を使って $f(x)$ と $g(x)$ を求められます．

この解法はとても見通しよいものだと思います．ポイントは (d) のような P を見つけることです（行列の**対角化**という）．今は 2×2 行列でしたから，もしかしたら闇雲な計算でも見つかるかもしれませんが，より関数の数が増えていくと，何らかの組織的な方法なしには P を見つけられなくなります．こういった方法を学ぶのが目標の一つです．

以上のような具体的な動機もありますが，数学を学ぶ目的として最も重要なのは，**物事を筋道立てて考える能力を養うこと**です．大学の数学は抽象的で難しく見えますが，辛抱強く論理を追えば必ず解決に至るようにできています．世の中はそうはできていなくてハードルが高いので，まずは安全にできている数学でトレーニングするわけです．計算も大事ですが，それは計算機に任せてもよいことです．人間が頭を使う部分のほうが大切です．

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_linear/17_linear.html`