2017 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）レポート問題 2 略解・コメント

担当：境 圭一

固有値は $a+1$ と $2b-9$ で，それぞれに属する固有空間は

$$V(a+1)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle,\quad V(2b-9)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\rangle$$

です．固有空間の基底の取り方はいろいろあります．

固有値は t の方程式 $\det(tE_3-A)=0$ の解として求められます．左辺は $(t-(a+1))^2(t-(2b-9))$ と因数分解されます．固有値 $a+1$ に属する固有空間は

$$V(a+1)=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^3\mid((a+1)E_3-A)\boldsymbol{u}=\mathbf{0}\}$$

です．$f\colon\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ を $f(\boldsymbol{u}):=((a+1)E_3-A)\boldsymbol{u}$ で定めれば，$V(a+1)=\operatorname{Ker}f$ とも表せます．いずれにしても，$V(a+1)$ は連立方程式

$$((a+1)I_3-A)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}a-2b+10&-a+2b-10&-2(a-2b+10)\\-a+2b-10&a-2b+10&2(a-2b+10)\\-2(a-2b+10)&2(a-2b+10)&4a-8b+40\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

の解全体のなす部分空間です．この連立方程式をみたす (x,y,z) は $x-y-2z=0$ をみたすことがわかりますから，固有ベクトルは一般に

$$\begin{pmatrix}y+2z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

と表されます．よって $V(a+1)$ の基底として，例えば

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

を選ぶことができます．$V(2b-9)$ のほうも同様です．

$\lambda=a+1$ に属する固有ベクトルは 2 次元ぶんあるわけですが，ある 1 つの固有ベクトルだけ求めて，それが基底である，としている答案が目立ちました．すべての固有ベクトルは基底の 1 次結合で表せる，というのが固有空間の基底ですから，固有ベクトルを**すべて**求めなければいけません．
固有多項式の計算は，多くの人は分数を含む計算をすることになりますが，そのときは分母をくくりだしてしまったほうが計算しやすいと思います．そのときの注意として，$n\times n$ 行列 A と $k\in\mathbf{K}$ に対し

$$\det(kA)=k^n\det A$$

です．たとえば $n=3$ なら，$\det A$ は A の成分を 3 つずつ選んで掛け合わせたものを足すわけですから，各要素を k 倍すると行列式は k^3 倍になることがわかると思います．