2017 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）中間試験（2017 年 11 月 21 日）

担当：境 圭一

- 試験時間：**10:40〜12:10**
- すべての問題について，答案用紙に指定された箇所に解答を記入してください．学籍番号と名前を忘れず記入してください．裏面使用の場合は，裏面の右上にも名前を書いてください．
- 計算用紙 1 枚 (A3) は提出不要です．
- 50 点満点です．配点は問題下部に書かれています．
- **教科書・ノート等の持ち込みは認めない**こととします．
- 試験開始後 30 分以内の退出，30 分以降の入室は認めないこととします．
- 試験終了後に解答例を配布します．

※ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の和と実数倍は通常のもの，内積は Euclid 内積とする

※答案に書くベクトルは縦横どちらでもよい

※特に断らない限り，答案用紙には答のみ記入すること．途中経過が書かれていて誤りを含む場合は減点対象になり得るので注意すること．

各自の学籍番号の下 2 桁の和を N とおく．例えば 17S5067Y なら $N = 13$, 17S6089Z なら $N = 17$. この N の値は以下のすべての問で共通とする．

1. 次の集合は $\mathbf{R}^3$ の部分ベクトル空間かどうか答えよ．

(1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; 3x = 2y = Nz \right\}$

(2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = N \right\}$

2. 次のベクトルの組は 1 次独立かどうか答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ N \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

(2) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

(3) $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$

3. 次の 1 次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots$ に対し Gram-Schmidt の直交化法を（講義でやった順序で）適用して得られる正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots$ を求めよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -N \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$

(3) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$

4. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ N \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ N-6 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とする．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立かどうか答えよ．（答のみでよい）

(2) $W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, W_2 = \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$ とおく．$W_1 + W_2$ は直和かどうか，理由とともに答えよ．

配点：10, 15, 15, 10（各小問につき 5 点，50 点満点）

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_linear/17_linear.html`