

※ $\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$ (の部分空間) の和と実数倍は通常のものとする

※ 答案にベクトルを書く場合は縦横どちらでもよい

※ 虚数単位は $\sqrt{-1}$ または i のどちらを使ってもよい (ただし判読できるようにすること)

1. V, W を \mathbf{K} ベクトル空間とする ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ または \mathbf{C}).

(1) 写像 $f: V \rightarrow W$ が線形であることの定義を述べよ.

(2) $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする. $\text{Ker } f$ の定義を述べ, $\text{Ker } f$ が V の部分ベクトル空間であることを証明せよ.

2. 次の線形写像 f_k ($k = 1, \dots, 4$) について, $\dim \text{Ker } f_k$ と $\dim \text{Im } f_k$ を求めよ. (答のみでよい)

(1) $f_1: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^1, f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := 2x - y$

(2) $f_2: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \mathbf{0}$

(3) $f_3: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - 3y \\ x + 4y \end{pmatrix}$

(4) $f_4: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2, f_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ 2x - 4y + 6z \end{pmatrix}$

3. 次の正方行列 A_k ($k = 1, \dots, 4$) について, その固有値を複素数の範囲ですべて求めよ. また $P^{-1}A_kP$ が対角行列になるような複素正則行列 P がある場合はそれを一つ求め, ない場合は「存在しない」と答えよ. (いずれも答のみでよい)

(1) $A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A_3 := \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

配点: 10, 20, 20 (各小問一つにつき 5 点, 50 点満点)

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_linear/17_linear.html