2017 年度 線形代数学 II（生物学コース・物質循環学コース）期末試験 解答例・解説

担当：境 圭一

解答例

1. (1) 各 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ と $a,b\in\mathbf{K}$ に対し $f(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})=af(\boldsymbol{u})+bf(\boldsymbol{v})$ が成り立つこと．

   (2) $\operatorname{Ker} f=\{\boldsymbol{u}\in V\mid f(\boldsymbol{u})=\mathbf{0}\}$.

   各 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\operatorname{Ker} f$ と $a,b\in\mathbf{K}$ に対し，$f(\boldsymbol{u})=f(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$ だから

$$f(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})=af(\boldsymbol{u})+bf(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}.$$

   これは $a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}\in\operatorname{Ker} f$ を意味する．よって $\operatorname{Ker} f$ は V の部分ベクトル空間である．

2. $\dim\operatorname{Ker} f_k, \dim\operatorname{Im} f_k$ の順に記す．

   (1) 1, 1

   (2) 2, 0

   (3) 0, 2

   (4) 2, 1

3. (1) 固有値は ± 4. $P=\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\end{pmatrix}$

   (2) 固有値は $\pm\sqrt{-1}$. $P=\begin{pmatrix}1&1\\-\sqrt{-1}&\sqrt{-1}\end{pmatrix}$

   (3) 固有値は $1,-5$. $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

   (4) 固有値は $0,1$. P は存在しない．

解説

1. (1) は和とスカラー倍について別々に述べてあってもよい．(2) は f の線形性により $f(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$ となることが明確に述べられていないといけない．
2. $\operatorname{Ker} f_k$ は，（連立）1 次方程式 $f_k(\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$ の解全体のなす部分ベクトル空間である．$\dim\operatorname{Ker} f_k$ が求まったら，次元定理 $\dim\operatorname{Ker} f_k+\dim\operatorname{Im} f_k=n$（ただし n は f_k の定義域の次元）に代入すれば $\dim\operatorname{Im} f_k$ を求めることができる．
3. 固有値は固有方程式 $\det(tE-A)=0$ の解であった．それぞれに属する固有空間の基底をすべて集めたものが $\mathbf{C}^n$ の基底になっていれば A は対角化可能で，P としてはそれらの基底（縦ベクトル）を横に並べて得られるものを取ればよい．答は基底の取り方によって変わりうるから，(1), (2), (3) については上の解答例と異なる答もあり得る．A_4 の固有空間の基底をすべて並べても $\mathbf{C}^4$ の 2 次元部分空間にしかならないから，A_4 は対角化可能ではない．

配点：10, 20, 20（各小問一つにつき 5 点，50 点満点）

`http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/17_linear/17_linear.html`