幾何学特別講義 I 演習問題 1（2018 年 9 月 28 日）

担当：境 圭一

1. 次の平面曲線 $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は正則であることを示せ．これらの像 $C := c(\mathbb{R}) := \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p = c(t)$ となる $t \in \mathbb{R}$ がある $\}$ の概形を描け．
   (1) $c(t) = (t^3 - 3t,\ t^2)$
   (2) $c(t) = \left(\dfrac{1}{5}t^5 - \dfrac{10}{3}t^3 + 9t,\ t^2\right)$
   (3) $c(t) = (\cos t,\ \sin t) + \dfrac{1}{2}(\cos 3t,\ \sin 3t)$
   (4) $c(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t)$
2. 次のホモトピー $h\colon [-1,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は h_{-1} が前問 (1)〜(4) の c に一致するようなものである．h_1 が表す曲線を図示せよ．これらのうち，正則ホモトピーであるものはどれか？
   (1) $h(s,t) := (t^3 + 3st,\ t^2)$
   (2) $h(s,t) := \left(\dfrac{1}{5}t^5 - \dfrac{15-5s}{6}t^3 + \dfrac{13-5s}{2}t,\ t^2\right)$
   (3) $h(s,t) := (\cos t,\ \sin t) + \dfrac{3-2s}{10}(\cos 3t,\ \sin 3t)$
   (4) $h(s,t) := (e^{(1-s)t/2} \cos t,\ e^{(1-s)t/2} \sin t)$
3. 正則曲線 $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ と次の曲線は正則ホモトピックであることを示せ．
   (1) $kc\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\quad (kc)(t) := kc(t)$（右辺は $\mathbb{R}^2$ のベクトルのスカラー倍），ただし $k > 0$
   (2) $c + \boldsymbol{v}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\quad (c+\boldsymbol{v})(t) := c(t) + \boldsymbol{v}$（右辺は $\mathbb{R}^2$ のベクトルの和），ただし $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$
   (3) $A(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおくとき，$c_\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\quad c_\theta(t) := A(\theta)c(t)$（右辺は行列と縦ベクトルの積）
   (4) $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\varphi' \neq 0$ をみたす C^∞ 級関数とするとき，$\overline{c} := c \circ \varphi$（パラメータ変換）
   ヒント：正則ホモトピーとして，それぞれ $h_s = ((1-s)\cdot 1 + sk)c,\quad h_s = c + s\boldsymbol{v},\quad h_s = c_{s\theta},\quad h_s(t) = c((1-s)t + s\varphi(t))$ を考えよ
4. ホモトピックであるという関係 $\sim$, 正則ホモトピックであるという関係 $\sim_r$ は同値関係であることを示せ．
5. **定値曲線** (constant curve) $c_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ c_0(t) := \mathbf{0}$ を考える．
   (1) c_0 は正則でないことを示せ．
   (2) 任意の曲線 $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は c_0 とホモトピックであることを示せ．（ヒント：$h_s := s \cdot c$ を考えよ）
   (3) 任意の 2 曲線 $c_1, c_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ はホモトピックであることを示せ．（ヒント：(2) と問題 4 を用いよ）
6. $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を正則曲線とする．また $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\varphi' \neq 0$ をみたす C^∞ 級関数とする．$\overline{c} := c \circ \varphi$ とするとき，t_0 における $\overline{c}$ の接線と，$\varphi(t_0)$ における c の接線は一致することを示せ．$\overline{c}$ と c の向きは一致するか？

（提出の必要はありません）

補足.

1. 数学の研究にはいろいろな形がありますが，典型的な進み方の 1 つは次のようなものです：
   (1) 研究対象を定義し，
   (2) 2 つの対象が「同型」である，という概念（同値関係）を定義し，
   (3)「同型」な対象は同一視するという立場で対象を分類する，つまり対象の「同型類」を分類する．
   「分類」というのは，あり得る「同型類」をすべてリストアップするということ，もしくは任意に与えられた 2 つの対象が「同型」か否かを判定する方法を与えること，というような意味です．(1) の対象全体の集合を X とおき，(2) の同値関係を $\sim$ と書くなら，商集合 $X/{\sim}$ をわかりやすく言い換える，ということでもあります．「同型」の意味は対象によって，また研究の立場によっても変わるもので，(1) と (2) はセットで研究対象と考えられるべきものです．(3) ができてしまえば，(1) と (2) のセットについては完全に理解できたと考えられるわけです．(3) を行うためには，**不変量** (invariant) を構成する，というのが常套手段の 1 つです．不変量とは，考えている対象 c に対

し何らかの代数的な量 $v(c)$ を対応させる関数のようなもので，次の性質をみたすものです：

$$\text{対象 } c_1, c_2 \text{ が「同型」} \implies v(c_1) = v(c_2).$$

例えば，前期の「トポロジー」では，位相空間 X に対して**基本群** $\pi_1(X)$ を対応させる「関数」が

$$\text{位相空間 } X_1, X_2 \text{ がホモトピー同値} \implies \pi_1(X_1) \cong \pi_1(X_2)$$

をみたすことを学んだはずです．π_1 は群に値を持つホモトピー不変量の例です．不変量がみたす上記の性質の対偶を取ると

$$v(c_1) \neq v(c_2) \implies \text{対象 } c_1, c_2 \text{ は同型でない}$$

ということが言えます．大抵の場合，対象が「同型」でないことを示すより，代数的な量（例えば整数など）である $v(c)$ が異なることを示す方がずっと容易です．つまり，**不変量は 2 つの対象が同型でないことを示すときに有効です**．一方で，$v(c_1) = v(c_2)$ であるとしても，c_1 と c_2 が「同型」である，とは一般には言えません．大抵は 1 つの不変量では区別できない 2 つの対象があって，それらを区別するために別の不変量を編み出す，ということが必要になりますし，そのようなことを繰り返しても完全な解決は到底望めないような難しい問題はいくらでもあると思います．

2. この講義の場合，「対象」は平面上の正則閉曲線で（以下「曲線」と略します），2 つの曲線が「同型」というのは正則ホモトピックであることです．この場合の分類問題は（例外的に）単独の不変量によって，次のように非常にきれいに解かれます（Whitney の定理）:

$$X = \{\,\text{曲線}\,\}, \quad \mathbb{Z} = \{\,\text{整数}\,\} \quad \text{とおくとき，} \quad R\colon X/{\sim_r} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}.$$

ここで使う不変量 R は**回転数** (rotation number) と呼ばれます．この定理を示すことが講義の前半の目標です．

3. この講義の題材として曲線を選んだ目的は以下の 3 つです：
   (a) Whitney の定理を通して分類問題が解かれる様子を鑑賞すること，
   (b) 前期の「トポロジー」で学んだ「ホモトピー」という概念に親しむこと，
   (c) 大学院での研究の様子をほんの少し垣間見ること．

   (c) では正則ホモトピーとは少し違った同値関係に関する分類問題を概観する予定で，それは後半のテーマです．

4. 「正則ホモトピー」の代わりに「ホモトピー」を分類の基準とすることも可能ですが，今回の問題 5 (3) は，それが自明な問題であることを示しています．ホモトピーは曲線の分類基準としては緩すぎて，正則ホモトピーくらいがちょうどよい厳しさの分類基準になっているわけです．このように，同じ対象でも，分類基準をどう設定するかで問題の難しさ，面白さは大きく変わります．問題設定にもセンスが問われるわけです．

5. 今回の問題 1, 2 は曲線や（正則）ホモトピーの具体的な例です．(1) ではホモトピーの途中で正則でない瞬間が現れること，(2) では正則ホモトピーにより 2 つの 2 重点がペアで解消されていく様子を観察してみてください．(3) は原点に太陽があり，そのまわりを半径 1 の円に沿って地球が公転していて，さらにそのまわりをまわっている月の様子のモデルです（半径や公転周期の設定はいい加減です）．h_{-1} と h_1 のどちらが実際の様子に近いか考えてみてください．(4) では螺旋が円に「巻きつく」様子が見えるはずです．

   一般には，これらのように曲線を表すきれいなパラメータを与えることは困難です．このあとの講義では具体的な式を扱うことはあまりなく，今回の問題 3 以降のように，何らかのパラメータ $c(t) = (x(t), y(t))$ が与えられている，という設定の下で抽象的に議論を進めます．