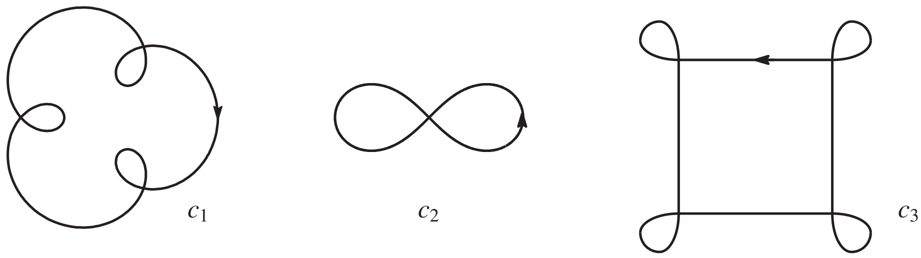
幾何学特別講義 I 演習問題 2（2018 年 10 月 5 日）

担当：境 圭一

1. 次の絵で表されるような正則閉曲線 c_1, c_2, c_3 の回転数 $R(c_i)$ を求めよ．また，これらの向きを逆にした曲線を $\overline{c}_i$ とおくとき，$R(\overline{c}_i)$ を求め，$-R(c_i)$ に等しいことを確かめよ．



2. $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \approx \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とおく．周期 T の閉曲線 $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は $S^1 \to \mathbb{R}^2\ (\approx \mathbb{C})$ のこととも思える．このことを以下の手順で示せ．
   (1) $\overline{c}\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ を $\overline{c}(e^{\sqrt{-1}t}) := c(T \cdot t/2\pi)$ で定義すると $\overline{c}$ は well-defined であること，つまり $e^{\sqrt{-1}t}$ と $e^{\sqrt{-1}(t+2\pi)}$ は $\overline{c}$ によって同じ点にうつされることを示せ．
   (2) 逆に $\overline{c}\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，$p_T\colon \mathbb{R} \to S^1$ を $p(t) := e^{2\pi\sqrt{-1}t/T}$ で定義し，$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $c := \overline{c} \circ p_T$ で定めると，c は周期 T の閉曲線であることを示せ．
   (3) (1), (2) は互いの逆対応であることを示せ．
3. $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を正則閉曲線とし，周期 T であるとする．
   (1) $k > 0$ に対し $\overline{c}(t) := c(t/k)$ とおく．$\overline{c}$ も正則で，周期は kT であることを示せ．
   (2) $\overline{c} \sim_r c$ であることを示せ．
4. 与えられた正則閉曲線 $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ に対し，$\overline{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $\overline{c}(t) := c(-t)$ で定義する．
   (1) $\overline{c}$ も c と同じ周期を持つ正則閉曲線で，向きは c と逆になることを示せ．
   (2) $R(\overline{c}) = -R(c)$ を示せ．
5. $0 \le r < 1$ に対し，$c_r(t) := r\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}$ とおく．
   (1) c_r は正則であることを示せ．（ヒント：$c_r'(t)$ の第 1 項と第 2 項の長さを比べよ）
   (2) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $c_r(t + T) = c_r(t)$ をみたす T の最小値 T_r を求めよ．
6. （「トポロジー」やホモロジー論を学んだ人向け）c を正則閉曲線とし，前問のように $c\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ とみなす．同様に $\gamma_c\colon S^1 \to S^1$ とみなすことにする．γ_c が $\pi_1(S^1)$ 上に導く準同型を $\gamma_{c*}\colon \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ と書く．同型 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ を 1 つ固定し $\gamma_{c*}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ とみなすとき，$\gamma_{c*}(1) = R(c)$ であることを示せ．π_1 を H_1 に替えて同様のことを考えよ．
7. 連続関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ は定数であることを示せ．ただし $\mathbb{R}$ の位相は Euclid 距離から導かれるものとし，$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{R}$ の部分集合と見て相対位相を入れる（離散位相になる）．

（提出の必要はありません）

補足.

1. 正則閉曲線 c の回転数 $R(c)$ とは，c 上を 1 周する間に Gauss 写像 $\gamma_c(t) := c'(t)/|c'(t)|$ が S^1 を何周するか，あるいは速度ベクトル $c'(t) \neq \mathbf{0}$ が $\mathbf{0}$ のまわりを何周するか，という整数値です．反時計回りを正として数えます．車を運転して元の位置に戻るまでの動きを閉曲線だとするならば，回転数 d の運転をする間にドライバーが見ている方向は $2\pi d$ だけ動くことになります．ドライバーが自分の体幹を中心に何回転したか，という値が回転数です．
2. 講義では，閉曲線を周期的な写像 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ と捉えましたが，問題 2 のように $S^1 \to \mathbb{R}^2$ とみなすこともできます．正則閉曲線の Gauss 写像も周期的な写像 $\mathbb{R} \to S^1$ なので，同様にして $\gamma_c\colon S^1 \to S^1$ とみなせます．逆に $S^1 \to \mathbb{R}^2$ を周期的な写像 $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ とみなすとき（問題 2 の (2) 参照），周期 T は $p_T\colon \mathbb{R}^1 \to S^1$ の取り方次第でどうにでもなります．実際，問題 3 を見てもわかるように，パラメータ変換は（正則）ホモトピー類を変えませんが，閉曲線

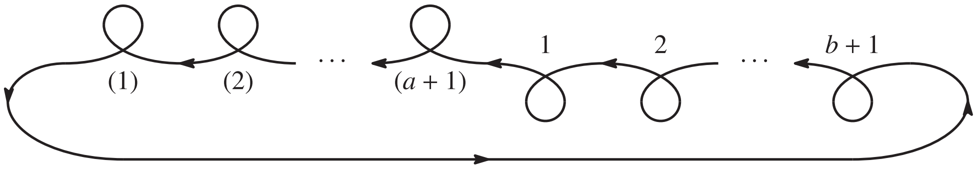
の周期はパラメータの入れ方次第でいくらでも変化します．つまり，正則ホモトピー類を考える限りにおいては周期は重要な量ではありません．このあとの講義で述べる言葉を使うと，閉曲線の周期は（正則）ホモトピー不変量ではありません．周期は定義によっては問題 4 のように変形に関して不連続になったりして不便なこともあるので，閉曲線は $S^1 \to \mathbb{R}^2$ とみなすほうがよいのかかもしれません．

幾何学特別講義 I レポート問題 1（2018 年 10 月 5 日）

担当：境 圭一

(1) 各自の学籍番号の下 2 桁の数を $10a + b$ $(0 \leq a, b \leq 9)$ と表す．例えば 16S1067α なら $(a, b) = (6, 7)$, 16S1089β なら $(a, b) = (8, 9)$.

講義でやった命題 2.8 を使って，次の図で表される正則閉曲線 $c_{a,b}$ の回転数 $R(c_{a,b})$ を求めよ．



(2) 与えられた $n \in \mathbb{Z}$ に対し，$R(c) = n$ となるような正則閉曲線 c を 1 つ図示せよ．

ヒント：(1) は「垂直方向」のベクトル $\boldsymbol{v}$ を使うとよい

※締切：**10/12**（金）の講義開始時

※教卓の上に提出してください．代理提出可です．

※締切以前の提出も受け付けます．研究室 (A403) にお越しください．