幾何学特別講義 I 演習問題 3（2018 年 10 月 12 日）

担当：境 圭一

1. $c_0, c_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ に対し，$c_0 \cdot c_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $(c_0 \cdot c_1)(t) := c_0(t) \cdot c_1(t)$（右辺は $\mathbb{R}^2$ の Euclid 内積）で定義する．このとき，$(c_0 \cdot c_1)' = c_0' \cdot c_1 + c_0 \cdot c_1'$ が成り立つことを示せ．
2. $c_0, c_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ をそれぞれ $c_0(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $c_1(t) := \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ で定義する．
   (1) c_0, c_1 は正則で，$c_0 \sim_r c_1$ であることを示せ．
   (2) $l(t) := \displaystyle\int_0^t \left| c_1'(s) \right| ds$ を計算し，弧長パラメータを持つ曲線 $\overline{c}_1 := c_1 \circ l^{-1}$ の曲率 $\kappa(t)$ を計算せよ．
   (3) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^T \kappa(t) dt = R(c_0) = 1$ であることを示せ．
3. $c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を正則閉曲線とし，$l(t) := \displaystyle\int_0^t \left| c'(s) \right| ds$ とおいて，弧長パラメータを持つ曲線 $\overline{c} := c \circ l^{-1}$ を考える．
   (1) c の周期を T とし，$L := l(T)$（閉曲線 $C := c(\mathbb{R})$ の長さ）とおくとき，$\overline{c}$ の周期は L であることを示せ．
   (2) $\overline{c}$ の曲率を κ とし，$s := l^{-1}(t)$ とおくとき，$\kappa(t) = \dfrac{1}{|c'(s)|^3} \det \begin{pmatrix} c'(s) & c''(s) \end{pmatrix}$ であることを示せ．
   (3) $R(c) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^T \dfrac{1}{|c'(s)|^2} \det \begin{pmatrix} c'(s) & c''(s) \end{pmatrix} ds$ であることを示せ．
   (4) $c_0 \sim_r c_1$ のとき $R(c_0) = R(c_1)$ であることを示せ．
   ヒント：c_0, c_1 の間の正則ホモトピー $h_s \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $(0 \le s \le 1)$, $h_0 = c_0$, $h_1 = c_1$ を考え，h_s の長さを L_s とおくとき，(3) から $R(h_s)$ が s の連続関数であることがわかるが，一方で $R(h_s) \in \mathbb{Z}$ である．

（提出の必要はありません）

補足.

1. 今回の問題 3 (4) から，正則閉曲線 c の回転数 $R(c)$ は正則ホモトピーで不変な量であることがわかります（単に「正則ホモトピー不変量」という）．この証明は大げさに言えば微分幾何的な方法で，このあとの講義ではトポロジーの立場から証明を与えます．一方，曲率 $\kappa(t)$ は正則ホモトピー不変量ではありません．例えば $c_r(t) := r\begin{pmatrix} \cos t/r \\ \sin t/r \end{pmatrix}$ とおくと，任意の $r, r' > 0$ に対し $c_r \sim_r c_{r'}$ ですが，c_r の曲率は $\kappa_r(t) = 1/r$ です．関数 κ 自体は変化するのに，その積分値（全曲率 (total curvature) とよぶ）は変化しない，というのは不思議に思えます．
2. 弧長パラメータをもつ正則閉曲線 c の長さ（問題 3 (1) 参照）を L とするとき，講義で述べた系 2.18 の対偶は

$$|R(c)| > n \implies \text{ある } t \text{ に対し } \kappa(t) > \frac{2\pi n}{L}$$

となり，意味するところは「決まった距離を等速で運転する間にたくさん回転するには，どこかで思い切ってハンドルを切らないといけない」ということです．直感に合う結果だと言えるでしょう．似たことを $\mathbb{R}^3$ 内の自己交差のない正則閉曲線 $c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$（結び目 (knot) という）について考えた結果として，**Fáry-Milnor の定理**

$$c \text{ が非自明な結び目} \implies c \text{ の全曲率} > 4\pi$$

が知られています．「非自明」というのは，輪ゴムのような単なる輪ではなく本当に絡まっている，ということで，Fáry-Milnor の定理は「曲線を本当に絡ませようとすれば，それなりに曲がりくねらせないといけない」ということを意味します．講義の系 2.18（の対偶）は全曲率が大きいときの話で，Fáry-Milnor の定理（の対偶）は全曲率が小さいときの話なので少し違いますが，気持ちは同じだと言えると思います．同様のことは他の状況でも考えられるはずで，興味深い問題だと思います．