幾何学特別講義 **I** 演習問題 **4**（**2018** 年 **10** 月 **19** 日）

担当：境 圭一

1. 集合 X, Y と写像 $f\colon X \to Y$, さらに X 上の同値関係 $\sim$ が与えられていて次をみたすとする：

$$x, y \in X, \quad x \sim y \implies f(x) = f(y)$$

   (1) $\overline{f}([x]) := f(x)$ で定義される写像 $\overline{f}\colon X/{\sim} \to Y$ が well-defined であることを示せ.

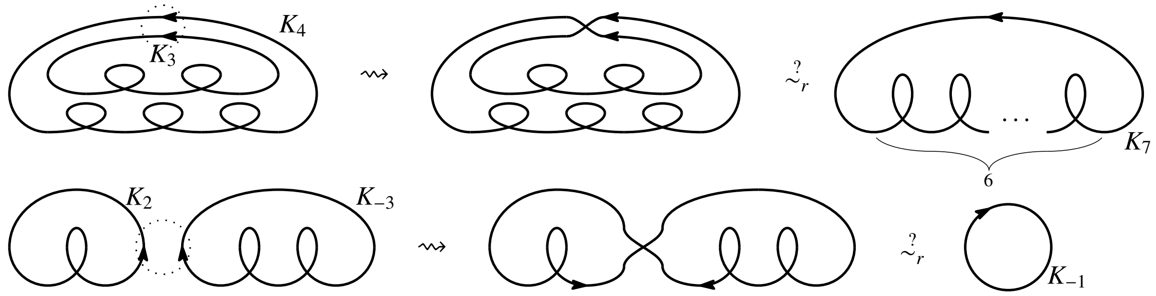
   (2) f が全射であることと $\overline{f}$ が全射であることは同値であることを示せ.

   (3) $\overline{f}$ は単射だが f は単射でないような例を挙げよ.

2. (1) K_3 と K_4 を下の図のようにつないで得られる曲線を正則ホモトピーで K_7 に変形せよ.

   (2) K_2 と K_{-3} を下の図のようにつないで得られる曲線を正則ホモトピーで K_{-1} に変形せよ.

   (3) $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し，K_m と K_n を適当な箇所でつないで得られる曲線を正則ホモトピーで K_{m+n} に変形せよ.



（提出の必要はありません）

補足.

1. **不変量**については演習問題 1 の補足に述べました．ある集合 X 上の同値関係 $\sim$ に関する不変量とは，簡単に言えば写像 $v\colon X/{\sim} \to A$ のことです．$X/{\sim}$ がよくわからなかったとしても，行き先の A がわかりやすい集合であれば，v で A にうつしかえることで $X/{\sim}$ の元をある程度区別できる，というのが不変量のアイデアです.
   単一の写像では $X/{\sim}$ の元すべてを区別できるわけではありませんが，例えば $X/{\sim}$ 上のすべての関数のなす環 $C^*(X/{\sim})$ を考えれば，

$$\text{すべての } v \in C^*(X/{\sim}) \text{ に対し } v([x]) = v([y]) \implies [x] = [y]$$

   ですから，関数環 $C^*(X/{\sim})$ は $X/{\sim}$ のことをすべて知っているはずです．このことから，対象を直接調べる代わりに，その上の関数環を調べる，というアイデアが得られます．トポロジーにおいても，このような考え方は重要です.

2. $X = \{$ 正則閉曲線 $\}$ とします．Whitney の定理を認めるなら，$X/{\sim_r}$ 上に abel 群の構造が入り，$\mathbb{Z}$ と同型となることを講義で見ました．幾何学的には，和は問題 2 のように 2 つの曲線を「つなぐ」操作で与えられます．この操作を**連結和** (connected sum) とよびます．つなぐ場所次第で曲線は変わるので，連結和は曲線そのものに対しては（つまり，X 上では）well-defined ではありませんが，正則ホモトピー類を取れば（つまり，$X/{\sim_r}$ 上では）well-defined です．言い換えると，2 つの曲線 c_0, c_1 をある箇所でつないで得られる曲線 c と，別の箇所でつないで得られる $\widetilde{c}$ は，正則ホモトピーで互いに移り合うことになります．これは決して自明ではないと思います．具体的な例で実験してみると面白いと思います.

3. 連結和は $X/{\sim_r}$ 上でないと well-defined にはなりませんが，つなぎ方も指定した和を考えることもできて，それは（おおむね）X 上で定まります．これについては講義の後半で述べる予定です.