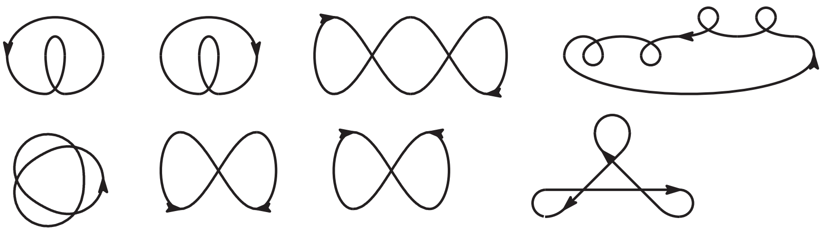
幾何学特別講義 **I** 演習問題 **5**（**2018** 年 **10** 月 **26** 日）

担当：境 圭一

1. 次の図で表される正則閉曲線について，回転数を調べることで互いに正則ホモトピックでないことがわかる組をすべて挙げよ．それ以外の組について，それらの間の正則ホモトピーを図示せよ．



2. 連続写像 $f, g\colon S^1 \to S^1$ に対し，$\deg(f \circ g) = \deg f \deg g$ であることを示せ．
3. $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{1}{x}$ は一様連続でないことを示せ．（任意の $\epsilon > 0$ と $x \in (0, \infty)$ に対し，「$|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \epsilon$」をみたすような $\delta > 0$ は，x に応じて小さく取らなければならないことを示す）

（提出の必要はありません）

補足.

1. 講義では，周期 1 の連続写像 $\mathbb{R} \to S^1$ が $S^1 \to S^1$ とみなせることを示した上で，連続写像 $f\colon S^1 \to S^1$ のホモトピー類はその**写像度** $\deg f$ で完全に決まる，ということを見ました．その証明をもう少し注意深く見ると，次のことが示されていることがわかります：集合 $\mathrm{Map}(S^1, S^1) := \{f\colon S^1 \to S^1 \mid 連続\}$ を考えると，$f, g \in \mathrm{Map}(S^1, S^1)$ に対し
$$d(f, g) := \max\{|f(x) - g(x)| \mid x \in S^1\}$$
により $\mathrm{Map}(S^1, S^1)$ 上に距離が定まり，この距離が定める位相に関して
   (i) $\deg\colon \mathrm{Map}(S^1, S^1) \to \mathbb{Z}$ が連続関数（従って，各弧状連結成分上では定数関数）であり，
   (ii) $\pi_0(\mathrm{Map}(S^1, S^1)) := \{\mathrm{Map}(S^1, S^1)$ の弧状連結成分$\}$ とおくと，(i) より導かれる $\deg\colon \pi_0(\mathrm{Map}(S^1, S^1)) \to \mathbb{Z}$ は全単射で，
   (iii) 各 $\deg^{-1}(m)$ は可縮である．

   まとめると，$\mathrm{Map}(S^1, S^1)$ は離散集合 $\mathbb{Z}$ とホモトピー同値ということになります．
   (i) より，$\deg f = \deg g$ とは，f, g が $\mathrm{Map}(S^1, S^1)$ の同じ弧状連結成分に入っているということです．従って f, g は $\mathrm{Map}(S^1, S^1)$ 上の「曲線」で結べます．この「曲線」が f, g の間のホモトピーに他なりません．
2. $f\colon S^1 \to S^1$ の写像度は，ホモロジー群の言葉では次のようにも表現できます：$H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 σ を 1 つ固定するとき，$f_*(\sigma) = (\deg f)\sigma$.
   一般に連続写像 $f\colon S^n \to S^n$ についても上の (i), (ii) と同様のことが言えて，$f_*(\sigma) = (\deg f)\sigma \in H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ で定まる写像度が，$f\colon S^n \to S^n$ のホモトピー類を完全に特徴づける不変量になっています（**Hopf の定理**）．
   ただしこの場合は (iii) にあたることは言えません．例えば $\deg^{-1}(0) \subset \mathrm{Map}(S^n, S^n)$ について完全にわかっているとは言えない状況だと思います．
3. 一般の $k, n \geq 1$ に対する連続写像 $S^k \to S^n$ の集合 $\mathrm{Map}(S^k, S^n)$ も考えたくなります．多様体論で Sard の定理を学ぶと次のことを示せます：
$$k < n \implies \pi_0(\mathrm{Map}(S^k, S^n)) = \{*\}, \ \text{つまり任意の}\ f\colon S^k \to S^n\ \text{は定値写像とホモトピック}$$
   $k > n$ のときは難しい問題だということが知られています．例えば $\pi_0(\mathrm{Map}(S^3, S^2)) \cong \mathbb{Z}$ など多くのことがわかってはいますが，一般の $k > n$ について $\pi_0(\mathrm{Map}(S^k, S^n))$ を記述する公式は知られていません．