幾何学特別講義 I 演習問題 6（2018 年 11 月 9 日）

担当：境 圭一

1. （演習問題 1-3 参照）任意の正則閉曲線 c は正則ホモトピーで次をみたす閉曲線 $\overline{c}$（講義では正規化された閉曲線と呼んだ）に変形できることを示せ．
   (1) $\overline{c}(0) = \mathbf{0}$
   (2) $|\overline{c}'| \equiv 1, \overline{c}'(0) = (1, 0)$
   (3) $\overline{c}$ の周期は 1
2. 行列またはベクトルに値を持つ関数 $X(t) = \left(x_{ij}(t)\right)_{i,j}$ に対し，$X(t)$ の t に関する積分を $\displaystyle\int_a^b X(t)dt := \left(\int_a^b x_{ij}(t)dt\right)_{i,j}$ で定義する．
   (1) 任意の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，$c(t) := \displaystyle\int_0^t \begin{pmatrix} \cos f(u) \\ \sin f(u) \end{pmatrix} du$ は弧長パラメータを持つ曲線であることを示せ．
   (2) 任意の関数 $\kappa\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，弧長パラメータを持つ曲線 c で次の条件をみたすものの積分表示を与えよ．
      (i) c の曲率は κ である
      (ii) $c(0) = \mathbf{0}, c'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

（提出の必要はありません）

補足．

(i) Whitney の定理の「$R(c_0) = R(c_1) \implies c_0 \sim_r c_1$」の部分のアイデアは次の通りでした：
   (i) 回転数が等しいことを，Gauss 写像 $\gamma_{c_0}, \gamma_{c_1}$ の写像度が等しいことに読み替える
   (ii) 連続写像 $S^1 \to S^1$ のホモトピー類が写像度で決まることから，$\gamma_{c_0}, \gamma_{c_1}$ の間のホモトピー γ_s の存在を導く
   (iii) γ_s を「積分」して c_0, c_1 の間の正則ホモトピーを作る

   「$c_0 \sim_r c_1 \implies R(c_0) = R(c_1)$」の部分も Gauss 写像の写像度の議論に帰着させていたことを思い出すと，正則閉曲線の正則ホモトピー類の問題は，その微分である Gauss 写像のホモトピー類の問題であったことがわかります．このように，滑らかな写像の性質に関する問題を，微分を取ることによって連続写像のホモトピー論に帰着する，という議論は様々な場面で見られる典型的なもので，**ホモトピー原理** (homotopy principle, h-principle) などと呼ばれることもあります．Whitney 以降，多くの研究者により洗練された理論がたくさんあります．ホモトピー原理の立場から見ると，$\mathbb{R}^2$ 上の正則閉曲線の正則ホモトピーに関する分類は本質的に $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ に帰着します．$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^n$ に変えた場合は $\pi_1(S^{n-1})$ に帰着し，これは $n \geq 3$ なら自明な群なので，$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 上の正則閉曲線の正則ホモトピーに関する分類は自明な問題です．

(ii) 正則ホモトピー類でなく曲線そのものを見る微分幾何学的な立場からは，様子が違って見えます．$\mathbb{R}^2$ 上の曲線の場合は曲率が曲線を決める，ということを小テストで見ました．今回の問題 2 は曲率から曲線を具体的に作る方法を与えています．$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 上の曲線の場合は曲率だけでは足りず，例えば $n = 3$ の場合は Frenet-Serret 標構と呼ばれるベクトル場の組で曲線が決まる，というようなことが知られています．