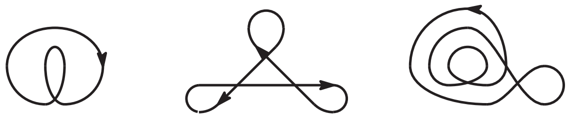
幾何学特別講義 I 演習問題 7（2018 年 11 月 16 日）

担当：境 圭一

1. 次の 3 つの正則閉曲線は正則ホモトピックであることを示し，これらをつなぐ generic な正則ホモトピーを 1 つ与えよ．そのホモトピーが自己接点，3 重点を何回通過するか数えよ．これらの曲線の Arnold 不変量 $J^{\pm}$ の値を求めよ．



2. 前問の曲線の向きを逆にした曲線について，$J^{\pm}$ の値を求めよ．
3. 適当な generic 曲線の絵を描き，その曲線の $J^{\pm}$ の値を求めてみよ．

（提出の必要はありません）

補足.

(i) Whitney の定理は，かなり自由な変形（正則ホモトピー）を許すときの閉曲線の分類定理で，その結果も非常に簡明でした．これに対し，generic 閉曲線の分類は，曲線の自己交差の状況を変えないという意味で，ほとんど変形を許さないような状況での分類です．このような視点での閉曲線の分類は極めて煩雑です．Arnold は参考文献に挙げた論文の中で次のように述べています：

Such a description seems to be very complicated (more complicated than knot theory).

前後を読まないとわかりにくいのですが，“Such a description” というのが generic 正則ホモトピーに関する分類のことで，“knot theory”（結び目理論）とは $\mathbb{R}^3$ 内に埋め込まれた円周（結び目）の分類理論のことです．結び目理論は現在でも多様体に関係するトポロジーにおいて非常に重要な研究分野であり，多くの人がいろいろな問題に取り組んでいるところですが，それより generic 閉曲線の分類のほうが難しそうだ，と Arnold は述べているわけです．Arnold は分類理論の第一歩として不変量 $J^{\pm}$ と St を導入しました．これらだけで Whitney の定理のような整った分類ができる，ということは望むべくもないのですが，$J^{\pm}$ と St についてだけでも既にいろいろ考えるべきことがあります．

(ii) “Generic” という言葉は数学のいろいろなところで登場します．平面閉曲線の場合は，自己交差が横断的な 2 重点のみであるものを generic な平面閉曲線といいます．何でもいいから正則閉曲線を描きなさい，と言われて無作為に描くと，3 重点や自己接触が起こるのは稀で，大抵は（気持ちとしては「確率 1」で）generic な曲線になります．このような意味で，generic 曲線は文字通り「一般的な」曲線です．講義で述べたように，3 重点や自己接触はほんのわずかな正則ホモトピーですぐに消えてしまうのに対し，横断的な 2 重点は少しの変形では揺らぎません．この意味で，generic 曲線は「安定な」曲線であるとも言えます．

$\mathrm{Map}(S^1, S^1) := \{c\colon S^1 \to S^1 \mid \text{regular}\}$ に然るべき位相を入れて位相空間と見なすとき（演習 6 の補足参照），自己交差が横断的な 2 重点のみである曲線のなす部分空間は開かつ稠密になっています．一般に，ある数学的対象のなす集合 X に適切な位相を入れたとき，ある性質 $\star$ をみたすもののなす部分空間 $X_\star$ が X において開かつ稠密であるとき，性質 $\star$ をみたす対象を generic な対象と呼ぶことが多いように思います．

(iii) 境の感覚では，generic 正則閉曲線の分類という問題設定は，難しいというよりは高望みしすぎという印象があって，もう少し簡単なところから考えるべきだと思われます．つまり，考えている同値関係 $\sim_g$ は曲線を厳しく分類しすぎで，もう少し弱い同値関係について考えるほうが同値類が減って簡単なのではないかと思えます．例えば自己接点通過は許すが 3 重点通過は許さない，というような同値関係に関する分類を考えることもできます．

(iv) 定義から明らかに $c_0 \sim_g c_1 \implies c_0 \sim_r c_1$ です．これと $c_0 \sim_r c_1 \iff R(c_0) = R(c_1)$ から，$R(c_0) \neq R(c_1) \implies c_0 \nsim_g c_1$ です．よって $\sim_g$ に関する分類は，共通の回転数を持つものに関して行えば十分です．