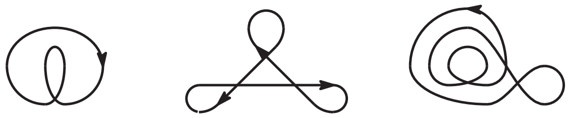
幾何学特別講義 I 演習問題 8（2018 年 11 月 21 日）

担当：境 圭一

1. 演習 7-1 の曲線について，Arnold 不変量 St の値を求めよ．



2. 前問の曲線の向きを逆にした曲線について，St の値を求めよ．
3. 適当な generic 曲線の絵を描き，その曲線の St の値を求めてみよ．
4. 消滅三角形の符号の定義が曲線の向きによらないことを確かめよ．また 3 重点の通過の前後で符号が必ず変わることを確かめよ．

（提出の必要はありません）

補足.

(i) Arnold 不変量の定義は等差数列の漸化式のようなもので，K_n での値が初項，自己接点や 3 重点を通過するときの値の変化が公差に対応します．数列 a_n の一般項は $a_1, a_2, \dots, a_n$ と順に求める 1 通りしか方法がなかったのに対し，ある曲線を K_n に変形する方法は複数ありますから，「漸化式」によって不変量の値が 1 通りに定まるかは明らかではありません．これは証明を要することで，しかも証明は易しくありません．参考文献に挙げた Arnold の論文には証明が書いてありますから，気になる人はぜひ挑戦してみてください．ファイバー束や基本群などに関する予備知識が必要になります．

(ii) Aenold 不変量はその定義から，ある意味で K_n からどれくらい離れているかを表す距離のようなものだということができます．一方で，Arnold 不変量の値が曲線のどのような幾何学的性質を反映しているか，というのは必ずしも明らかではありません．この点は回転数と大きく異なります．気になる人は Arnold の論文や関連する文献を当たってみてください．

(iii) 初項にあたる $J^{\pm}(K_n), St(K_n)$ の値，また公差にあたる，自己接点や 3 重点を通過するときの値の変化については，実は講義で与えた値でなくても自由に設定することができ，それらの値についても $J^{\pm}$ や St は well-defined です．講義のような値に設定した理由は，そのようにすると今後学ぶ「連結和」について綺麗な公式が成り立つからです．

綺麗な公式を成り立たせるための初項や公差を Arnold がどうやって発見したかと言えば，おそらく膨大な数の具体例を通じて見つけたものと思われます．Arnold に限らずロシアの数学者は，ものすごい勢いで具体例の計算を行い，その中からアイデアを導き出すことがあるようで，しかしそういう計算は普通は論文に書かないので，なぜそのような発想に至ったのか論文を読んでいても見当がつかない，ということが多いように思います．もちろん他の国の数学者もたくさん具体例を計算するわけですが，ロシアはその中でもトップクラスという印象があります．個人的見解です．

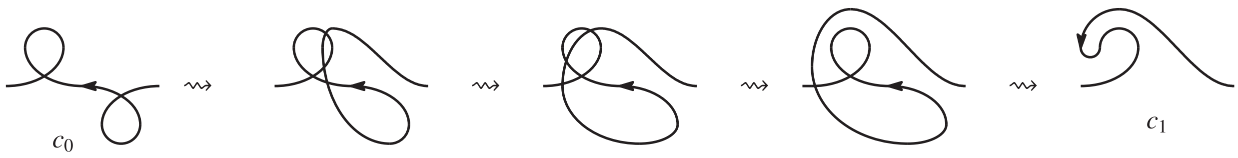
(iv) 一般に，多様体間の写像で何らかの滑らかさを仮定したものを考え，それらを何らかの意味のホモトピーで分類しようとするとき，そのホモトピーに関する不変量を考えるのが有効です．不変量がある性質をみたすとき，その不変量は**有限型**であると言います．「ある性質」を説明するのは難しいのですが，ある意味で多項式のようなもののことで，有限型不変量には**次数**と呼ばれる 0 以上の整数が定まります．Arnold 不変量は 1 次の有限型不変量と呼ばれるものになっています．上で Arnold 不変量を等差数列に例えましたが，等差数列の一般項が n の 1 次式であったことを思い出すと，「1 次の不変量」という感じがしてくるかもしれません．

1 次があれば 2 次や 3 次もあるわけで，「高次 Arnold 不変量」を定義し研究している人もいます．

幾何学特別講義 **I** レポート問題 **2**（**2018** 年 **11** 月 **21** 日）

担当：境 圭一

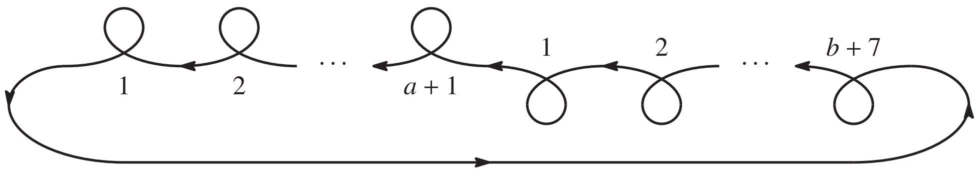
(1) Generic 曲線 c_0 の一部を次の図のように変形して c_1 を得たとするとき，$J^+(c_1) - J^+(c_0)$, $J^-(c_1) - J^-(c_0)$, ならびに $St(c_1) - St(c_0)$ を計算せよ．



ヒント．1 番目と 3 番目，4 番目の変形で自己接点を通過し，2 番目の変形で 3 重点を通過している．講義で扱った例と見比べよ．

(2) 各自の学籍番号の下 2 桁の数を $10a + b$ と表す．ただし a, b は整数で $0 \leq a, b \leq 9$. 例えば 16S1067α なら $(a, b) = (6, 7)$, 16S1089β なら $(a, b) = (8, 9)$.

次の図で与えられる generic 閉曲線 $c_{a,b}$ に対し，$J^+(c_{a,b})$, $J^-(c_{a,b})$, $St(c_{a,b})$ を求めよ．



※締切：**11/30**（金）の講義開始時

※教卓の上に提出してください．代理提出可です．

※締切以前の提出も受け付けます．研究室 (A403) にお越しください．