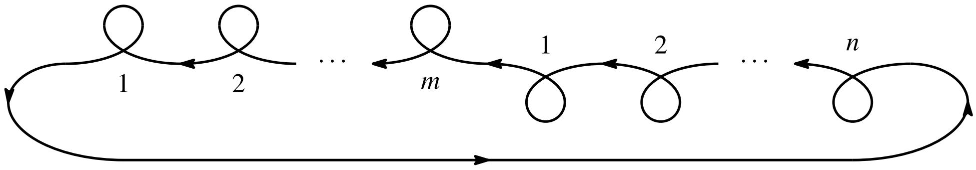
幾何学特別講義 I 演習問題 9（2018 年 11 月 30 日）

担当：境 圭一

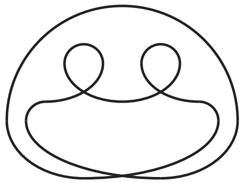
1. 0 以上の整数 m, n に対し，次の図で表される曲線を $C_{m,n}$ とする．



(1) $J^{\pm}$ と St が連結和に関して加法的であることを使って，$J^{\pm}(C_{m,n}), St(C_{m,n})$ を求めよ．
ヒント．$C_{0,n} = K_{n+1}$ であり，$C_{m,n}$ は $C_{m-1,n}$ と K_0 の連結和とみなせる

(2) $C_{m,n}$ と K_{n-m+1} の間の正則ホモトピーが通過する 3 重点の回数の最小値を決定せよ．

2. (1) 次の絵で表される generic 閉曲線を C とする．$St(C)$ を求めよ．



(2) $n \geq |m|$ をみたすような $m \in \mathbb{Z}$ と $n \in \mathbb{N}$ が任意に与えられたとする．2 重点を n 個持ち $St(C) = m$ をみたす generic 閉曲線 C を 1 つ構成せよ．

（提出の必要はありません）

補足．

(i) 今後主に考えるのは，C_0, C_1 の間の橋 Γ が与えられているとき，$St(C_0 +_\Gamma C_1)$ の値を $St(C_0), St(C_1)$ と C_0, C_1, Γ の何かしらの性質を使って表す，ということです．簡単なものがわかっている状態から出発して複雑なものを作り，その性質を調べる，という方向です．
逆に，与えられた曲線 C を $C_0 +_\Gamma C_1$ の形に分ける，つまり複雑なものを調べるために簡単なものに分ける，というのは一般には難しいことです．ただし C が連結和に分かれる場合には，その分け方を見つけるのは比較的容易で，Arnold の公式が有効に働きます．

(ii) $\sim_g$ の定義から，2 重点数の異なる 2 つの generic 閉曲線は $\sim_g$ に関して同値ではありません．問題 2. (2) で m を固定し n を動かすと，同じ St の値を持つ generic 閉曲線を無限個作れます．これらは 2 重点数が異なるので，generic 閉曲線としては異なるものです．つまり St によって区別されない曲線が無限個存在することがわかります．もっとも，これらは 2 重点数で区別できてはいます．
上で述べたことは，St が曲線を区別する能力はかなり限られていることを示します．$J^{\pm}$ についても同様です．(J^+, J^-, St) の 3 対を考えるともう少し強力になりますが，この 3 対でも区別されない曲線はわりとたくさんあります．Arnold の論文の締めの部分には，F. Aicardi による計算結果の膨大な表が載っています．眺めてみると，いかに複雑な問題なのか実感できると思います．