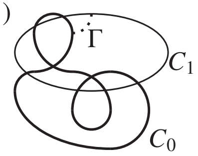
幾何学特別講義 I 演習問題 10（2018 年 12 月 7 日）

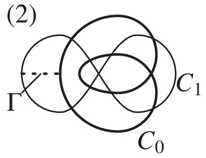
担当：境 圭一

1. 次の図で表される generic 閉曲線 C_0, C_1 と橋 Γ について，$T_\Gamma^{St}(C_0, C_1)$ を求めよ．また和公式を使って $St(C_0 +_\Gamma C_1)$ を計算せよ．

(1)

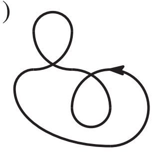


(2)

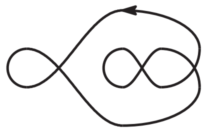


2. 次の絵で表される generic 閉曲線 $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ について，$\mathbb{R}^2 \setminus c(\mathbb{R})$ の各連結領域 A に対し，$\mathrm{ind}^A(c)$ を計算せよ．

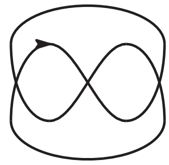
(1)



(2)



(3)



3. (1) $\mathbb{R}^2 \setminus K_0$ は 2 個の有界な弧状連結成分 A_1, A_2 と，非有界成分 A_∞ に分かれる．$\mathrm{ind}^{A_i}(K_0)$ を求めよ．
   (2) $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ とする．$\mathbb{R}^2 \setminus K_n$ は n 個の有界な弧状連結成分 $A_1, \ldots, A_n$ と，非有界成分 A_∞ に分かれる．$\mathrm{ind}^{A_i}(K_n)$ を求めよ．
4. $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を generic 閉曲線とし，$C := c(\mathbb{R}), A \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$ を弧状連結成分の 1 つとする．
   (1) A が非有界な領域のとき，$\mathrm{ind}^A(c) = 0$ であることを示せ．
   (2) $\overline{c}(t) := c(-t)$ とおく（このとき $\overline{c}(\mathbb{R}) = C$ である）．すべての弧状連結成分 A に対し $\mathrm{ind}^A(\overline{c}) = -\mathrm{ind}^A(c)$ であることを示せ．
5. $c_0, c_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を generic な閉曲線で $c_0 \sim_g c_1$ をみたすものとする．$A_0 \subset \mathbb{R}^2 \setminus c_0(\mathbb{R})$ を 1 つの弧状連結成分とし，$A_1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus c_1(\mathbb{R})$ を A_0 に対応する弧状連結成分とするとき，$\mathrm{ind}^{A_0}(c_0) = \mathrm{ind}^{A_1}(c_1)$ であることを示せ．
6. Generic 閉曲線 $C_i \subset \mathbb{R}^2$ $(i = 0, 1)$ が generic な位置にあるとし，Γ を C_0 と C_1 の間の橋，v_i を Γ の端点における C_i の法線ベクトルで Γ 側を向くものとする．C_i に v_i が導く向きを入れるとき，これらの向きが $C_0 +_\Gamma C_1$ にも向きを誘導することを示せ．

（提出の必要はありません）

補足.

(i) $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を generic な閉曲線のパラメータとします．パラメータが与えられていると，その速度ベクトル $c'(t)$ によって向きが決まります．単に c の像 $C := c(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ を考えると，それだけから向きを読み取ることはできません．向きを与えることと，パラメータを与えることはだいたい同値です．$\mathbb{R}^2 \setminus c(\mathbb{R})$ の弧状連結成分 A の指数 $\mathrm{ind}^A(c)$ は向きを使って定義され，問題 4. (2) が示すように，向きは実際に指数に影響します．結び目理論などの分野では，$\mathrm{ind}^A(c)$ を Alexander numbering と呼ぶこともあるようです．
一方で，曲線の向きは法線ベクトルを与えることによって定義することもでき，$\mathrm{ind}_v^A(C)$ はパラメータ c を与える代わりに法線ベクトルを与えることにより定義した指数です．Arnold 不変量は向きに関係しない不変量なので，いろいろな公式はなるべく向きによらない形で記述する方が望ましく，そのために $\mathrm{ind}_v^A(C)$ という記号を導入しました．この講義では v として橋が定める法線ベクトルを取るので，$\mathrm{ind}_v^A(C)$ には恣意的に選んだ向きが一切使われていないことになります．

(ii) 正則ホモトピーは写像のホモトピーととても相性がよく，$R(c) = \deg \gamma_c$ というホモロジー群の言葉で表される不変量で分類がうまくいきました．これに対し，$\sim_g$ という同値関係での分類は写像のホモトピーとの相性がよくありません（ホモトピックな写像でも異なる曲線とみなしてしまうから）．例えば和の公式がそれほどすっきり書かれないのは，そのあたりに理由があると思います．講義で述べている和公式を定式化するにあたっては，

どこがホモロジー的に記述でき，どこがそうでないか，明確にわかるように工夫したつもりです．例えば指数 (index) は前者，3 重点通過の数 T_Γ^{St} は後者にあたります．

実際に講義してみて感じていますが，定理を述べるのに必要な記号を準備し，定理を述べたあと証明をする，という教科書的な流れは，論理的には明確だったとしても，実際に研究していたときの雰囲気を再現するには至りません．現実には，定理らしきものができたときにはもっといろいろな記号が混沌とした形で書かれていて，それをきれいに整えるという過程が別にありました．上で述べた，ホモロジー的な部分とそうでない部分の区別も，このときに考えました．苦労する過程ではありますが，だんだん定理の意味が見えてきて，とてもエキサイティングな過程でもあります．