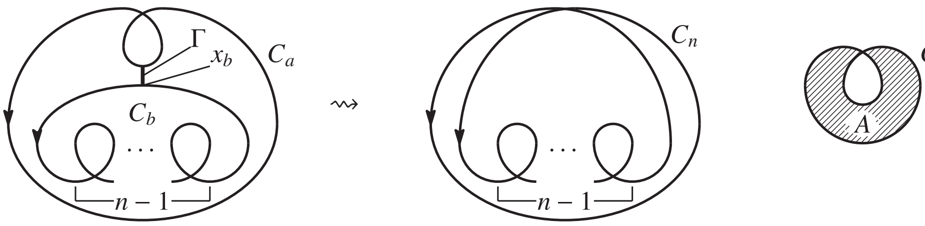
幾何学特別講義 **I** 演習問題 **11**（**2018** 年 **12** 月 **14** 日）

担当：境 圭一

1. 講義の補題 8.10, 命題 8.16 で省略した，3 重点通過数についての議論を完成させよ．
2. 次の絵で表される generic 閉曲線 $C_n = C_a +_\Gamma C_b$ ($C_a \sim_g K_2, C_b \sim_g K_n$) について，$St(C_n)$ を以下の手順で求めよ．



(1) 上の図の向きは Γ が定める法線ベクトルにより定まる向きである．この向きを表すパラメータを c_a, c_b とおくとき，$\mathbb{R}^2 \setminus C_a$ の弧状連結成分 A で C_b を含むもの（上図参照）について，$\mathrm{ind}^A(c_a)$ を求めよ．

(2) $\Gamma \cap C_b = \{x_b\}$ となる点 $x_b \in C_b$ を取る．C_b の 2 重点 $p_1, \dots, p_{n-1}$ に対し，$e^{c_b}_{x_b}(p_i)$ を求めよ．

(3) C_a の 2 重点は $\mathbb{R}^2 \setminus C_b$ の非有界な連結成分 B_∞（その指数は 0 である）に入っているので

$$T^{St}_\Gamma(C_a, C_b) = \sum_{i=1}^{n-1} e^{c_b}_{x_b}(p_i)\mathrm{ind}^A(c_a)$$

であることがわかる．$T^{St}_\Gamma(C_a, C_b)$ を計算せよ．

(4) Γ が定める C_b の法線ベクトル v_b は B_∞ を指し示すので $\mathrm{ind}_{v_b}(C_b) = \mathrm{ind}^{B_\infty}(c_b) = 0$ である．よって

$$St(C_a +_\Gamma C_b) = St(C_a) + St(C_b) - T^{St}_\Gamma(C_a, C_b)$$

であることがわかる．これを用いて $St(C_n)$ を計算せよ．

一般化された連結和に関する $J^\pm$ の性質について． ここでは $C_0 +_\Gamma C_1$ が連結和である場合，つまり C_i が $\mathbb{R}^2 \setminus C_{i+1}$ の非有界領域に含まれ ($i = 0, 1$, また $C_2 := C_0$), さらに Γ は自己交差を持たず C_0, C_1 と端点でのみ交わる場合に

$$J^\pm(C_0 +_\Gamma C_1) = J^\pm(C_0) + J^\pm(C_1)$$

が成り立つこと (Arnold の定理) を示そう．

$C \subset \mathbb{R}^2$ を generic 閉曲線とし，$c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を C のパラメータで周期 1 のものとする．$p_1, \dots, p_n$ を C の 2 重点とし，$p_k = c(s_k) = c(t_k)$ $(0 \le s_k < t_k < 1)$ であるとする．C を各 p_k の近くだけで少し generic ホモトピーで変形し，$c'(s_k)$ と $c'(t_k)$ が直交するようにしておく．

(1) $\varphi_{k,1}\colon (s_k, t_k) \to S^1$ を $\varphi_{k,1}(t) := \dfrac{c(t) - p_k}{|c(t) - p_k|}$ で定義する．$\displaystyle\lim_{t \to s_k+0} \varphi_{k,1}(t) = c'(s_k)$, $\displaystyle\lim_{t \to t_k-0} \varphi_{k,1}(t) = -c'(t_k)$ であることを示せ．従って $\varphi_{k,1}\colon [s_k, t_k] \to S^1$ が定義され連続である．

(2) 同様に $\varphi_{k,2}\colon (t_k, s_k+1) \to S^1$, $\varphi_{k,2}(t) := \dfrac{c(t) - p_k}{|c(t) - p_k|}$ が連続写像 $\varphi_{k,2}\colon [t_k, s_k+1] \to S^1$ に拡張することを示せ．

$i = 1, 2$ に対し，$\varphi_{k,i}(t) = e^{\sqrt{-1}\,\theta_{k,i}(t)}$ となる連続関数 $\theta_{k,i}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を取ると，$c'(s_k) \perp c'(t_k)$ より

$$\theta_{k,1}(t_k) - \theta_{k,1}(s_k) = \Bigl(l + \frac{1}{2}\Bigr)\pi, \quad \theta_{k,2}(s_k+1) - \theta_{k,2}(t_k) = \Bigl(m + \frac{1}{2}\Bigr)\pi \quad (l, m \in \mathbb{Z})$$

の形である．

$$i^c_1(p_k) := \frac{2(\theta_{k,1}(t_k) - \theta_{k,1}(s_k))}{\pi} = 2l + 1, \quad i^c_2(p_k) := \frac{\theta_{k,2}(s_k+1) - \theta_{k,2}(t_k)}{\pi} = 2m + 1$$

をそれぞれ p_k の**第 1, 第 2 指数**とよぶ．また $i^c(p_k) := i^c_1(p_k) - i^c_2(p_k)$ を p_k の**指数**とよぶ．

(3) $\overline{c}(t) := c(-t)$（向きを逆にした曲線）とおくと

$$i^{\overline{c}}_1(p_k) = -i^c_2(p_k), \quad i^{\overline{c}}_2(p_k) = -i^c_1(p_k)$$

であることを示せ．このことを使って，$i^c(p_k)$ は曲線の向きによらず像 $C := c(\mathbb{R})$ のみで定まることを示せ．

このことより，p_k の指数を $i^C(p_k)$ と書くことに意味がある．これを使って

$$I^{\pm}(C) := \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} i^C(p_k) \pm \frac{n}{2}$$

と定める．$\sim_g$ に関して同値な曲線は 2 重点の様子が共通なので $I^{\pm}$ の値は等しい．よって $I^{\pm}$ は $\sim_g$ に関する不変量である．以下，$C := C_0 +_\Gamma C_1$ が連結和である場合に，$I^{\pm}(C_0 +_\Gamma C_1) = I^{\pm}(C_0) + I^{\pm}(C_1)$ が成り立つことを示そう．
$p_1, \dots, p_{n_0}$ を C_0 の 2 重点とする．これらは C の 2 重点でもある．C_0 のパラメータ c_0 を取り，$p_k = c_0(s_k) = c_0(t_k)$ とする．$\Gamma \cap C_0$ が $c_0((s_k, t_k))$ 上にあるとする．

(4) $c_0((t_k, s_k + 1))$ 側は C と C_0 で共通であることに注意して，$i_2^C(p_k) = i_2^{C_0}(p_k)$ を示せ．
(5) $c_0((s_k, t_k))$ 側は C_1 と連結和を取ったことにより C_0 のときとは曲線が変わっているが，C_0 と C_1 が分離していることに注意して，$i_1^C(p_k) = i_1^{C_0}(p_k)$ を示せ．従って $i^C(p_k) = i^{C_0}(p_k)$ である．
(6) C_1 の 2 重点 $q_1, \dots, q_{n_1}$ についても同様のことを考えることにより，$I^{\pm}(C_0 +_\Gamma C_1) = I^{\pm}(C_0) + I^{\pm}(C_1)$ を示せ．

実は $I^{\pm}$ により $J^{\pm}$ と St に関係がつく．このことを以下の手順で示せ．

(7) K_n $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ に対し $J^{\pm}(K_n) = I^{\pm}(K_n) - 3St(K_n)$ を示せ．
(8) 3 重点通過ならびに自己接点通過の際の $J^{\pm}$ と $I^{\pm} - 3St$ の値の変化が共通であることを示せ．このことと (7) より $J^{\pm} = I^{\pm} - 3St$ であることを示せ．
(9) $C := C_0 +_\Gamma C_1$ が連結和であるとき，$J^{\pm}(C_0 +_\Gamma C_1) = J^{\pm}(C_0) + J^{\pm}(C_1)$ を示せ．（ヒント：連結和に関する St の性質と (6) を使う）
(10) C の 2 重点数を n とするとき，$J^+(C) - J^-(C) = n$ を示せ．

（提出の必要はありません）

補足．

(i) 講義では Mendes de Jesus-Romero Fuster による St の加法公式を学びました．これは次回述べる最も一般的な状況での加法公式よりは弱い公式ですが，実際に St を計算するときには効果的な（閉曲線の 2 重点数に関する帰納的な）計算方法を与えるという点で有用な公式です．今回の問題 2 はこのことの例です．詳しくは次回述べます．
(ii) Mendes de Jesus-Romero Fuster は $J^{\pm}$ についても加法公式を与えています．講義では時間の関係で割愛していますが，代わりに今回と次回の演習問題で一部を述べたいと思います．今回述べたのは Arnold の論文に書かれていることです．$J^{\pm}$ と St はそれぞれ自己接点と 3 重点という一見無関係なものに注目して得られた不変量なので，それらを結びつける $I^{\pm}$ という不変量の存在はとても不思議です．系として得られる (10) の事実は重要ですが，この事実だけなら $I^{\pm}$ を使わなくても (7), (8) と同様の考え方で証明することもできます．(8) の証明はそう簡単ではないと思いますので，Arnold の論文を参照してほしいと思います．

幾何学特別講義 I レポート問題 3（2018 年 12 月 14 日）

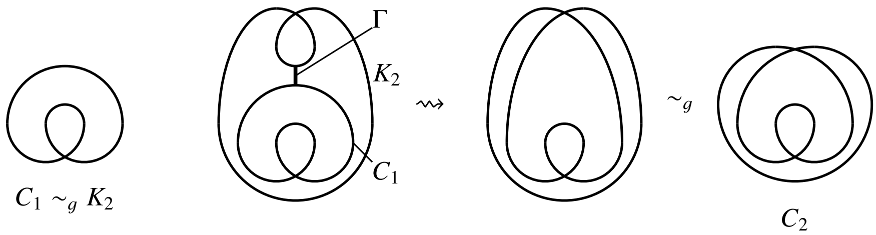
担当：境 圭一

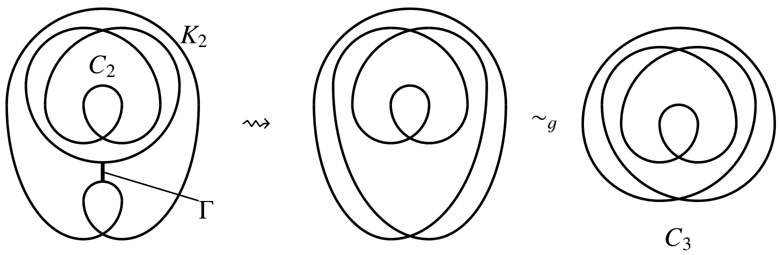
各自の学籍番号の下 4 桁の数を a とおく．例えば 16S1067Y なら $a = 1067$, 16S1089Z なら $a = 1089$.
次のように帰納的に定義される generic 閉曲線 $C_n \subset \mathbb{R}^2$ に対し，$St(C_a)$ を求めよ．

(1) $C_1 \sim_g K_2$,

(2) $n \geq 2$ のとき $C_n = C_{n-1} +_\Gamma K_2$.

ただし (2) の K_2 と橋 Γ は次の図のように取る：





etc.

ヒント：講義でやった定理 8.8 を使うとよい．12/14 の演習問題 11-2 がヒントになる．

※締切：**12/21（金）の講義開始時**

※教卓の上に提出してください．代理提出可です．

※締切以前の提出も受け付けます．研究室 (A403) にお越しください．