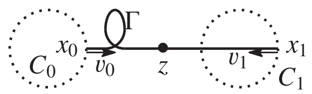
幾何学特別講義 I 演習問題 12（2018 年 12 月 21 日）

担当：境 圭一

1. 一般化された連結和 $C_0 +_\Gamma C_1$ に関する $St$ の公式の特別な場合として，Mendes de Jesus-Romero Fuster の公式や Arnold の公式が復元されることを確かめよ．
2. (Open problem) Mendes de Jesus-Romero Fuster の公式を使うと，generic 閉曲線の 2 重点数に関して帰納的に $St$ を計算できることを見た．同様に，一般化された連結和に関する公式を使って $St$ の値を（帰納的に）計算できるような generic 閉曲線の族を考えよ．

**一般化された連結和に関する $J^\pm$ の性質について．** 演習 11 では $C_0 +_\Gamma C_1$ が連結和である場合に $J^\pm(C_0 +_\Gamma C_1) = J^\pm(C_0) + J^\pm(C_1)$ が成り立つこと (Arnold の定理) を示した．今回は strange sum（つまり，$C_0$ と $C_1$ が分離している場合）について，少し条件を課した状況で $J^\pm$ の性質を調べる．具体的には，橋 $\Gamma$ の $C_i$ 上の端点を $x_i$ $(i = 0, 1)$ としたとき，ある $z \in \Gamma, z \neq x_0, x_1$ が存在して

(a) $\Gamma$ のうち $x_0$ と $z$ で挟まれる部分は $C_1$ と交わらず，
(b) $\Gamma$ のうち $z$ と $x_1$ で挟まれる部分は $C_0$ と交わらない




$n_\Gamma = 1, |\mathrm{Int}\,\Gamma \cap (C_0 \cup C_1)| = 1$

という場合について, 次の等式が成り立つことを示す：

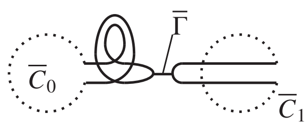
$$J^\pm(C_0 +_\Gamma C_1) = J^\pm(C_0) + J^\pm(C_1) + \mathrm{ind}_{v_0}(C_0) + \mathrm{ind}_{v_1}(C_1) \pm 2n_\Gamma \pm |\mathrm{Int}\,\Gamma \cap (C_0 \cup C_1)|$$

ただし

- $v_i$ は $x_i$ における $C_i$ の法線ベクトルで $\Gamma$ 側を向くもの $(i = 0, 1)$,
- $n_\Gamma$ は $\Gamma$ の 2 重点の数,
- $\mathrm{Int}\,\Gamma := \Gamma \setminus \{x_0, x_1\}$,
- 有限集合 $S$ に対し，$|S|$ は $S$ に含まれる要素の数

である．

$C_i$ $(i = 0, 1)$ を $\Gamma$ に沿って図のように変形して得られる曲線を $\overline{C}_i$ と書く ($z$ の直前までの "pushing-appendices"). また $\overline{C}_0$ と $\overline{C}_1$ の間の橋 $\overline{\Gamma}$ を図のように定める．作り方から $\overline{C}_0 +_{\overline{\Gamma}} \overline{C}_1 \sim_g C_0 +_\Gamma C_1$ であるが，上の条件 (a), (b) から $\overline{C}_0$ と $\overline{C}_1$ は分離したままであり，従って $\overline{C}_0 +_{\overline{\Gamma}} \overline{C}_1$ は連結和であるから，前回示した Arnold の定理により




$$J^\pm(C_0 +_\Gamma C_1) = J^\pm(\overline{C}_0 +_{\overline{\Gamma}} \overline{C}_1) = J^\pm(\overline{C}_0) + J^\pm(\overline{C}_1) \qquad (*)$$

である．あとは $J^\pm(\overline{C}_i)$ を計算すればよい．

$C_i$ を $\overline{C}_i$ に変形する途中で通過する自己接点は，次の 2 つのタイプに分かれる：

(i) $\Gamma$ の各 2 重点に対応するもの
(ii) $\Gamma \cap C_i$ の各点に対応するもの

(1) (i) のタイプの自己接点通過は $\Gamma$ の 2 重点 1 つにつき 2 回生じ，うち 1 つは direct な接点の正方向の通過，もう 1 つは inverse な接点の正方向の通過であることを示せ．従って，$\Gamma$ の 2 重点で $\overline{C}_i$ 側にあるものの個数を $n_i$ とするとき $(i = 0, 1)$, (i) のタイプの自己接点通過の $J^\pm(\overline{C}_i) - J^\pm(C)$ への寄与は $\pm 2n_i$ である．

(2) 各 $x \in \Gamma \cap C_i, x \neq x_i$ に対し (ii) のタイプの自己接点通過は正の方向に 1 回生じ，講義で定義した $s(x) = \pm 1$ が $s(x) = +1$ か $s(x) = -1$ に応じて direct または inverse であることを示せ．従って

$$l_i^\pm := |\{x \in \Gamma \cap C_i \mid x \neq x_i,\ s(x) = \pm 1\}|$$

とおくとき，(ii) のタイプの自己接点通過の $J^\pm(\overline{C}_i) - J^\pm(C)$ への寄与は $\pm 2l_i^\pm$ である．

(3) $l_i^+ - l_i^- = \mathrm{ind}_{v_i}(C_i)$ であることを示せ．

以上のことから

$$\begin{aligned} J^\pm(\overline{C}_i) &= J^\pm(C_i) \pm 2n_i \pm 2l_i^\pm \\ &= J^\pm(C_i) \pm 2n_i + (l_i^+ - l_i^-) \pm (l_i^+ + l_i^-) \\ &= J^\pm(C_i) \pm 2n_i + \mathrm{ind}_{v_i}(C_i) \pm |\mathrm{Int}\,\Gamma \cap C_i|\,. \end{aligned}$$

これらを $(*)$ に代入し，条件 (a), (b) と定義より $n_0 + n_1 = n_\Gamma$ であることを合わせると結論を得る．

（提出の必要はありません）

補足．

(i) 任意に与えられた generic 閉曲線を（一般化された）連結和に分解するのは一般には難しく，いつでもできる方法は，講義で述べた Mendes de Jesus-Romero Fuster による $St$ の加法公式を使う方法くらいです．もっとも一般的な状況での公式は論理的には重要ですが，実際に計算するという実用上はもっと弱い公式で十分だということです．問題 2 に述べたように，もっとも一般的な公式を使って効果的に計算できる面白い例はまだ見つけていません．何か思いつかれた方は，ぜひお知らせいただければと思います．

(ii) Arnold は $St$ については strange sum に関する公式を与えていますが，この公式の右辺が strange sum の構成に使う $\Gamma$ を含んでいないことから，$St$ が strange sum の情報を満足に取り出さないことを示す，という否定的な解釈もできます．今回述べた $J^\pm$ の加法公式は，一連の研究の出発点になったもので，$J^\pm$ のほうが $\Gamma$ の情報も取り出すことができる，ということを示しています．条件 (a), (b) は証明の途中で使いましたが，実はこれらがなくても strange sum については全く同じ公式を証明できます．

より一般の連結和についても $J^\pm$ の公式を与えることができます．アイデアは $St$ の場合と同じで，$C_0, C_1$ を「分離して」strange sum の形にすれば今回示した公式を使うことができ，あとは「分離」するまでに自己接点を何回通過するかを数えればよい，という方針で証明します．具体的な内容については論文をご覧ください．