

1. $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を generic 閉曲線のパラメータとする. c が 2 重点を n 個持つとき, c の回転数 $R(c)$ は $|R(c)| \leq n+1$ をみたすことを示せ. 等号が成立するような c の例を与えよ.
2. (数学的に厳密な問いではありません) L, M を \mathbb{R}^n 内の多様体とし, 次元はそれぞれ $\dim L = l, \dim M = m$ であるとする. L, M が一般的な位置にあるとき, $\dim(L \cap M) = (l+m) - n$ であることを説明せよ. これを用いて, 次のことを説明せよ
 - (i) \mathbb{R}^3 内の 1 次元多様体 K, K' は一般的には互いに交わらない.
 - (ii) M を n 次元多様体とするとき, はめ込み $f: M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ は一般的には 2 重点を持ち, それらは孤立点である. また一般的には f は 3 重点を持たない.
 - (iii) M を n 次元多様体とするとき, 写像 $M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ は一般的には単射である.
 - (iv) M を $2n-1$ 次元多様体とするとき, はめ込み $f: M \hookrightarrow \mathbb{R}^{3n-1}$ は一般的には 2 重点を持ち, 2 重点全体の集合は $n-1$ 次元多様体である. また一般的には f は 3 重点を持たない.

(提出の必要はありません)

補足. この講義で述べた平面閉曲線は, 多様体論の言葉では, はめ込み (immersion) $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ のことです. この講義の内容の続きとしては, 例えば

- 他の次元では $S^j \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ はどれくらいあるか, それらの分類はどのようにしたらよいか
- 一般の多様体 M, N について, はめ込み $M \hookrightarrow N$ がどれくらいあるか, それらの分類はどのようにしたらよいか
- はめ込み以外の種類の写像についてはどうか

などの方向が挙げられます. 講義では $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ について少し述べました. 球面やユークリッド空間については, それらの間の写像は次元によってだいたい決まっています. 一般の多様体になると, 個別の事情が出てきて難しくなり, また面白くなります. このような方面に興味がある人は, 準備として

- 多様体論,
- (コ) ホモロジー論,
- ホモトピー論

などを学ぶとよいでしょう.

続きとしては他の方向もあり得ると思いますので, 知りたいことがある場合はいつでも研究室をお尋ねください.

多様体間の C^∞ 級写像がはめ込み (immersion) であることの定義から次のことが言える：

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ に対し $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ と表される C^∞ 級写像 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m \leq n$) がはめ込みであるための必要十分条件は、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ に対し、 $n \times m$ 行列

$$Jf(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right)_{i,j}$$

の階数が m であることである。

この事実を使って

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(x_1, x_2) := \left(x_1 - \frac{2x_1}{u}, x_2, \frac{1}{u}, \frac{x_1 x_2}{u} \right) \quad (\text{ただし } u := (1 + x_1^2)(1 + x_2^2) \text{ とおいた})$$

がはめ込みであることを示せ。また、 f の 2 重点 (つまり、 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ で、 $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}')$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ をみたす $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2$ が存在するもの) をすべて求めよ。

※締切：1/21 (月) 16:00

※直接手渡ししてもらおうか、研究室 (A403) 前のレポートボックスに提出してください。代理提出可です。締切以前の提出も受け付けます。

※ 1/23 (水) 頃から研究室で返却する予定です。