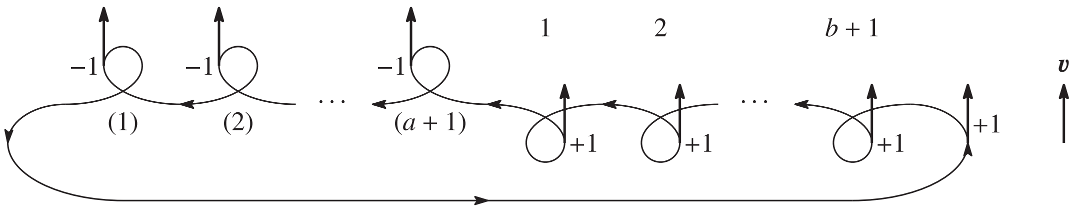
幾何学特別講義 **I** レポート問題 **1**（**2018** 年 **10** 月 **5** 日）略解・コメント

担当：境 圭一

(1)「垂直上向き」のベクトル $\boldsymbol{v}$ を使って考えることにします．速度ベクトルが $\boldsymbol{v}$ と同じ向きになる点は図の通りです．講義でやった方法で符号 $\epsilon = \pm 1$ を調べた値も書き込んでおきます．



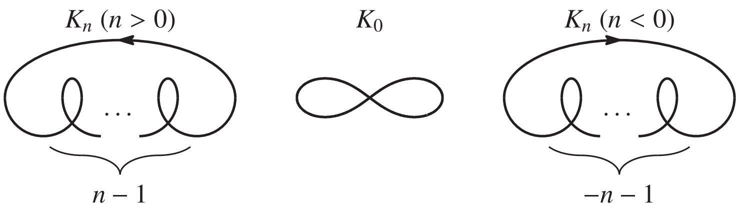
符号 $+1$ の点が $b+2$ 個，符号 -1 の点が $a+1$ 個あります．符号を足し合わせると回転数が得られるので

$$R(c_{a,b}) = (b+2) - (a+1) = b - a + 1$$

を得ます．

(2) (1) の議論は $a, b \geq 0$ であれば同様にできますから，与えられた $n \in \mathbb{Z}$ に対し，$b - a + 1 = n$ となるような $a, b \geq 0$ を適当に指定すれば求める曲線を得ます．例えば $n \geq 1$ のときは $(a, b) = (n-1, 0)$, $n \leq 0$ のときは $(a, b) = (0, 1-n)$ としてやればよいでしょう．もちろん他の a, b もあり得ます．

図示するときは向きが大切です．講義で述べたように，向きを逆転させると回転数は -1 倍になります．
上で述べた (2) の解答例は (1) を応用したものですが，他にもいろいろな答があり得ます．講義でも述べたように，回転数 $n \in \mathbb{Z}$ の閉曲線として，今後はしばしば下図の K_n を扱います．これらが $R(K_n) = n$ をみたすことを確かめてみてください．あえて K_0 に向きをつけていませんが，その理由も考えてみてください．



答案の書き方について述べます．(1) については，適当なベクトル $\boldsymbol{v}$ を指定した上で

(a) 速度ベクトルが $\boldsymbol{v}$ と同じ方向を向くような曲線上の点はどれか

(b) それらの点における符号 ϵ は ± 1 のどちらか

(c) それらの符号を足し合わせると得られる回転数の値

を明確にすべきでしょう．また (2) は

(d) 求められている曲線を（向きも込めて）図示するとこのようになって，

(e) 実際，この曲線について (1) と同じように回転数を求めると n になっている

という答案が求められると思います．多くの人が (d) しか書いていませんでしたが，当然 (e) も必要です．**誰**[*1]**が読んでも中身がわかるように**書くことが大切です．何事にもエビデンスを求められる時代ですから，説得力ある文章を書く訓練が必要です．出題者が思っていることを言い当てるだけではあまり意味はありません．
上記 (a)〜(e) について均等な配点で採点しました．(2) で $n > 0$ の場合は正しいが $n \leq 0$ の場合を考察していない，という答案もあって，そういう場合は該当箇所の点数を半分にしたりしています．

http://math.shinshu-u.ac.jp/~ksakai/18_curve/18_curve.html

[*1] ある程度予備知識のある人