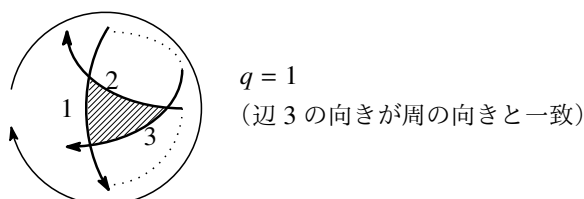


(1) 4 つの変形での不変量の変化は、それぞれ以下の通りです：

- 1 番目：direct 自己接点を正の方向に通過するので、通過後は  $J^+$  が 2 増える
- 2 番目：3 重点を負の方向に通過するので、通過後は  $St$  が 1 減る
- 3 番目と 4 番目：inverse 自己接点を負の方向に通過するので、それぞれ通過後は  $J^-$  が 2 増える

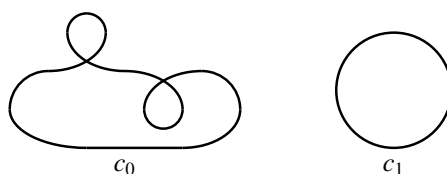
3 重点通過が負の方向なのは、通過後の newborn triangle の符号をみるとわかります：



よって不変量の変化は次のようになります：

$$J^+(c_1) - J^+(c_0) = 2, \quad J^-(c_1) - J^-(c_0) = 4, \quad St(c_1) - St(c_0) = -1.$$

$c_0, c_1$  がそれぞれ次の図のような場合は、講義で扱った例そのものになっています。



(2)  $c_{a,b}$  を (1) の変形で  $c_{a-1,b-1}$  に変形するとき、不変量は (1) の通りに変化します。(1) の変形を  $a+1$  回繰り返すことで  $c_{a,b}$  から  $K_{b-a+7}$  に変形することができ (どの人も  $b-a+7 > 0$  のはずですが)、変形後の不変量の値は

$$J^+(K_{b-a+7}) = -2(b-a+6), \quad J^-(K_{b-a+7}) = -3(b-a+6), \quad St(K_{b-a+7}) = b-a+6$$

です。以上のことから、求める値は以下の通りです：

$$\begin{aligned} J^+(c_{a,b}) + 2(a+1) &= -2(b-a+6) & \text{つまり} & \quad J^+(c_{a,b}) = -2b-14, \\ J^-(c_{a,b}) + 4(a+1) &= -3(b-a+6) & \text{つまり} & \quad J^-(c_{a,b}) = -a-3b-22, \\ St(c_{a,b}) - (a+1) &= b-a+6 & \text{つまり} & \quad St(c_{a,b}) = b+7. \end{aligned}$$

$a, b$  の値は本質的ではなく、 $a+1, b+7$  を自然数  $m, n$  ( $m < n$ ) で置き換えても同様に計算されることがわかります。さらに、11/30 の講義で述べた加法公式により、 $m, n$  の大小が逆でも結果は同じであることもわかります。

(1) では 3 重点通過の符号が最も非自明なところでしょう。消滅三角形または生成三角形の符号を計算した跡がないと減点されます。“ $J^+(c_0) = 0$ ”と書いてあったり、 $c_0$  に 1 番目の変形を行って得られた曲線を  $c_2$  とおくと、 $c_2$  の絵の近くに“ $J^+ = 2$ ”と書いてあったりする答案が多く見られましたが、これらも変です。問題文の図は  $c_0$  の一部分しか示していないので、 $J^+(c_0)$  を求める術はありません。また  $c_0$  から  $c_2$  に変形するときの  $J^+$  の変化が  $+2$  なのであって、 $J^+(c_2) = 2$  というものではありません。

(2) では  $c_{a,b} \sim_r K_{b-a+7}$  ですが、 $b-a+7$  という値を間違えている答案が多く見られました。 $K_n$  は回転数 (の絶対値) が  $n$  の曲線で、「巻いている部分」は  $n-1$  個あります。また、例えば  $J^+(c_{a,b}) = J^+(K_{b-a+7}) + 2(a+1)$  としてしまった答案も多くありました。変形の方を間違えたわけですが、このタイプの誤りをする気持ちはわかります (境もよくやる)。回避する方法はありません。慎重にやるのみです。