幾何学特別講義 **I** レポート問題 **3**（**2018** 年 **12** 月 **14** 日）略解・コメント

担当：境 圭一

$\Gamma \cap K_2 = \{x_0\}, \Gamma \cap C_{n-1} = \{x_1\}$ となる $x_0 \in K_2, x_1 \in C_{n-1}$ を取ります．これらの点における K_2, C_{n-1} の法線ベクトルで Γ のほうを向くものを v_i とします．このとき講義で見たように

$$St(C_n) = St(K_2) + St(C_{n-1}) - T^{St}_{\Gamma}(K_2, C_{n-1}) + 2\,\mathrm{ind}_{v_0}(K_2)\mathrm{ind}_{v_1}(C_{n-1})$$

でした．まず $St(K_2) = 1$ です．また v_1 が $\mathbb{R}^2 \setminus C_{n-1}$ の非有界領域のほうを向いているので $\mathrm{ind}_{v_1}(C_{n-1}) = 0$ となり，従って最後の項は 0 です．
C_{n-1} の 2 重点数は $n-1$ であることが帰納的にわかります．これらを $p_1, \ldots, p_{n-1}$ とします．また K_2 の 2 重点を q とします．$p_i \in A_i$ となる $\mathbb{R}^2 \setminus K_2$ の弧状連結成分 A_i はすべての i について共通で，曲線に v_0, v_1 が導く向きを入れるとき $\mathrm{ind}^{A_i}(K_2) = +1$ です．また q は $\mathbb{R}^2 \setminus C_{n-1}$ の非有界領域（その指数は 0 です）に含まれます．以上のことから

$$T^{St}_{\Gamma}(K_2, C_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} e^{C_{n-1}}_{x_1}(p_i)\mathrm{ind}^{A_i}(K_2) + 0 = \sum_{i=1}^{n-1} e^{C_{n-1}}_{x_1}(p_i)$$

です．考えている向きに関しては $e^{C_{n-1}}_{x_1}(p_i) = -1$ であることが見て取れますから，$T^{St}_{\Gamma}(K_2, C_{n-1}) = -(n-1)$ となります．以上をまとめると

$$St(C_n) = 1 + St(C_{n-1}) + n - 1 = St(C_{n-1}) + n$$

を得ます．これは容易に解ける（はずの）数列の漸化式です．$St(C_1) = St(K_2) = 1$ であることから

$$St(C_n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

を得ます．

St は曲線の向きに依存しない値なので，いろいろな公式は向きに依存しない形で書かれます．しかし実際に計算するためには補助的に向きを入れないとどうにもなりません．この向きをどちらにしているかをはっきりさせないといけません．向きを変えると $e^{C_{n-1}}_{x_1}(p_i)$ と $\mathrm{ind}^{A_i}(K_2)$ の符号が変わってしまいます．もっとも，これらは同時に符号を変えるので，最終的な答には影響しません．

今回のレポートは，講義の §8.3 で述べた応用のうち，講義では説明を省略したほうの場合に相当します．$\mathrm{ind}_{v_1}(C_{n-1}) = 0$ の部分はこの問題に特有の事情で，一般にはそうでない例もあり得ます．
Arnold の論文では，一般的な和公式は示されていませんが，今回のレポートと同様のやり方で “pushing-away formula” という計算法が示されています．これを一般化したのが講義で扱った各種の公式だと言えます．