幾何学特別講義 **I** レポート問題 **4**（**2019** 年 **1** 月 **11** 日）略解・コメント

担当：境 圭一

(i) f がはめ込みであることについて．Jf を次のように基本変形するとよいでしょう：

$$Jf(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{2(1-x_1^2)}{u(1+x_1^2)} & \dfrac{4x_1x_2}{u(1+x_2^2)} \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{2x_1}{u(1+x_1^2)} & -\dfrac{2x_2}{u(1+x_2^2)} \\ \dfrac{x_2(1-x_1^2)}{u(1+x_1^2)} & \dfrac{x_1(1-x_2^2)}{u(1+x_2^2)} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1, 3, 4 行目に加える}]{\text{2 行目を何倍かして}} \begin{pmatrix} 1-\dfrac{2(1-x_1^2)}{u(1+x_1^2)} & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{2x_1}{u(1+x_1^2)} & 0 \\ \dfrac{x_2(1-x_1^2)}{u(1+x_1^2)} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 列目}\times u(1+x_1^2)} \begin{pmatrix} u(1+x_1^2)-2(1-x_1^2) & 0 \\ 0 & 1 \\ -2x_1 & 0 \\ x_2(1-x_1^2) & 0 \end{pmatrix}$$

$u(1+x_1^2) \neq 0$ なので，2 番目の変形も行列の階数を変えません．最後の行列について，$(3,1)$ 成分と $(4,1)$ 成分がともに 0 と仮定すると $x_1 = x_2 = 0$ ですが，このとき $u = 1$ であることから $(1,1)$ 成分は -1 となります．よって 1 列目がすべて 0 になることはあり得ませんから $\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x}) = 2$ です．

(ii) f の **2** 重点について．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \boldsymbol{x}' = (x_1', x_2') \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ に対し $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}')$ とします．

(1) まず $f(\boldsymbol{x})$ と $f(\boldsymbol{x}')$ の第 2 座標を比べると $x_2 = x_2'$ です．

(2) 次に第 3 座標を比べると $x_1^2 = (x_1')^2$ を得ます．$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ と (1) から $x_1 = -x_1' \neq 0$ を得ます．

(3) (1), (2) を使って第 4 座標を見ると $x_2 = x_2' = 0$ を得ます．

(4) 最後に第 1 座標を見ると，$x_1 \neq 0$ から $u = 2$ でなければならないことがわかり，(3) を代入すると $x_1 = -x_1' = \pm 1$ です．

以上から，f の 2 重点は

$$f(1,0) = f(-1,0) = (0,0,1/2,0)$$

のみです．

$Jf(\boldsymbol{x})$ の基本変形の中で，安易に文字式で割っている答案が目につきました．文字式を含む分母，平方根の中にある文字式，対数の真数の中にある文字式などは，いつでも注意しないといけません．
また問題文にある通り，2 重点は $\mathbb{R}^4$ 内の点です．答は $(0,0,1/2,0)$ であって，$(\pm 1, 0)$ ではありません．

今回の内容について，いくつか補足しておきます．
(a) C^∞ 級写像 f は，考えている点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ の十分近くでは Taylor 展開の 1 次の項で表される線形写像で近似されます．この 1 次の項が $Jf(\boldsymbol{x})$ に他なりません．$\operatorname{rank} Jf(\boldsymbol{x}) = 2$ というのは，この線形写像が単射であることを意味します．以上のことから，はめ込みとは「局所的に見れば「つぶれていない」写像である」ということができます．

(b) 一般に

$$f_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}, \quad f_n(x_1, \dots, x_n) := \left(x_1 - \frac{2x_1}{u}, x_2, \dots, x_n, \frac{1}{u}, \frac{x_1x_2}{u}, \dots, \frac{x_1x_n}{u} \right), \quad u := (1+x_1^2)\cdots(1+x_n^2)$$

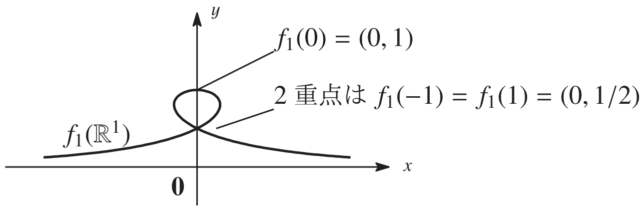
ははめ込みになっていて，ただ 1 つの 2 重点 $f(1,0,\dots,0) = f(-1,0,\dots,0) = (\underbrace{0,\dots,0}_{n}, 1/2, 0, \dots, 0)$ を持ちます．今回のレポートは $n = 2$ の場合でしたが，一般の n についてもほとんど同様の議論ができます．この写像は例えば次の文献に書いてあります：

[1] 足立正久，埋め込みとはめ込み，岩波書店，1984

[2] H. Whitney, *The singularities of a smooth n-manifold in* $(2n-1)$*-space*, Ann. Math. **45** (1944). no. 2, 247–293.

$\mathbb{R}^n$ が自己交差をちょうど 1 つ持つように $\mathbb{R}^{2n}$ にはめ込まれる様子は想像しにくいと思いますが，次元を落として

$f_1\colon \mathbb{R}^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$ の像 $f_1(\mathbb{R}^1) \subset \mathbb{R}^2$ の図を見ると，一般の f_n の様子も何となく見えてくるかもしれません：



(c) はめ込み f_n を使うと，任意の自然数 k に対し，2 重点をちょうど k 個持つはめ込み $S^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n}$ を作ることもできます．まず $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i x_i^2 = 1\}$ とみなし，$i\colon S^n \to \mathbb{R}^{2n}$ を 2 つの自然な包含写像

$$S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \times \{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1})\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{2n}$$

の合成で定めると，i は 2 重点をもたないはめ込み（より強く，埋め込み）になっています．$i(S^n)$ 上に相異なる k 個の点 $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^{2n}$ を取り，これらを中心として半径が十分小さい開球 B_j を $B_j \cap B_l = \emptyset$ となるように取ります．同相写像 $\varphi_j\colon B_j \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^{2n}$ で，$B_j \cap i(S^n)$ を $\mathbb{R}^n \times \{(0, \ldots, 0)\} \subset \mathbb{R}^{2n}$ にうつすものが存在します．このとき

$$M := \Bigl(i(S^n) \setminus \Bigl(\bigcup_{j=1}^{k} B_j \cap i(S^n)\Bigr)\Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{j=1}^{k} \varphi_j^{-1}(f_n(\mathbb{R}^n))\Bigr)$$

を考えると，f_n が無限遠では自然な包含写像 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ に近づいていくことから，$B_j \cap i(S^n)$ を取り除いた「穴」に $\varphi_j^{-1}(f_n(\mathbb{R}^n))$ が滑らかにつながり，M は 2 重点を k 個持つようにはめ込まれた S^n になっています（この M ははめ込みの像ですが，はめ込み $S^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n}$ を具体的に書くこともできます）．n が偶数の場合には，向きにも注意することで，2 重点の符号の和が与えられた整数 r に等しいようなはめ込み $S^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n}$ を構成することもできます．詳しくは上に挙げた文献 [1, 2] をご覧ください．